

김상현

# 미적분학

강의록

*unfinished version, November 28, 2015*



SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

## Contents

<b>Part I. 급수와 테일러 전개</b>	<b>1</b>
Chapter 1. 급수	3
1. 수열과 급수	3
2. 등비급수	3
3. 비교판정법	3
4. 멱근판정법	3
5. 비율판정법	3
6. 적분판정법	3
7. 교대급수와 절대수렴급수	3
8. 부록: 실수이야기	5
Chapter 2. 멱급수	7
1. 멱급수	7
2. 멱급수와 수렴반경	7
3. 지수함수와 멱급수	7
4. 삼각함수와 멱급수	8
5. 쌍곡함수	8
6. 역삼각함수와 멱급수, 그리고 역함수 정리	8
7. 부록: 미분방정식, 멱급수 기본정리의 증명	8
Chapter 3. 테일러 전개	9
1. 코시의 평균값 정리	9
2. 로피탈의 정리	9
3. 무한소와 근사다항식	9
4. 테일러정리	11
5. 테일러 급수	15
6. 임의의 점을 기준으로 한 테일러 전개	24

7. 부록: 로피탈 정리의 증명	26
풀이: 탐구문제 중에서	26
<b>Part II. 벡터와 행렬</b>	<b>29</b>
Chapter 4. 좌표공간과 좌표계	31
1. 좌표공간	31
2. 극좌표계, 영역의 넓이 (4.2, 9.5)	31
3. 원기둥 좌표계와 구면 좌표계	34
4. 유클리드 공간:생략	35
Chapter 5. 벡터	37
1. 평행이동	37
2. 유향선분과 벡터	37
3. 벡터의 내적	38
4. 직선과 평면의 방정식	41
5. 일차독립과 종속	43
6. 부록: 좌표공간의 기저와 차원	44
Chapter 6. 행렬과 선형사상	47
1. 행렬	47
2. 선형사상	49
3. 부록: 등장변환과 행렬의 극한	50
Chapter 7. 정사각행렬과 행렬식	57
1. 역행렬	57
2. 치환	57
3. 행렬식	60
4. 부록: 치환의 부호와 행렬식	63
Chapter 8. 삼차원 공간과 벡터의 외적	65
1. 외적	65
2. 외적과 행렬	68
3. 회전력	71
<b>Part III. 곡선</b>	<b>73</b>

Chapter 9. 곡선	75
1. 매개화된 곡선	75
2. 가속도 벡터	79
3. 재매개화	79
4. 곡선의 길이	82
5. 극좌표계와 영역의 넓이	87
6. 호의 길이와 재매개화	88
7. 선적분	89
8. 곡선과 곡률	93
9. 부록: 현수선, 가까운 곡선, 등시곡선	97
<b>Part IV. 다변수함수와 미분법</b>	<b>101</b>
Chapter 10. 다변수함수	103
1. 그래프와 등위면	103
2. 연속함수	103
3. 방향미분과 편미분	103
4. 미분가능함수	104
5. 연쇄법칙	104
6. 기울기 벡터와 등위면	105
7. 부록: 일급함수, 열린 집합, 닫힌 집합, 유계인 집합	106
Chapter 11. 최대최소값 문제와 고계미분	109
1. 적분기호 속의 미분법	109
2. 이계미분	109
3. 테일러 전개와 근사값이론	110
4. 임계점 정리	113
5. 헤세판정법	115
6. 라그랑지 승수법	116
부록: 라이프니츠 정리의 증명, 변분법	117
Chapter 12. 다변수 벡터함수	119
1. 야코비 행렬	119
역함수, 음함수 정리	119

Chapter 13. 벡터장과 선적분	121
1. 벡터장	121
2. 선적분	121
3. 기울기 벡터장	121
4. 잠재함수의 존재성	121
5. 전미분, 미분형식	126
포앙카레 도움정리, 적분곡선	126
<b>Part V. 다중적분과 그린 정리</b>	<b>129</b>
Chapter 14. 다중적분	131
1. 넓이와 부피	131
2. 푸비니 정리	131
3. 2차원 푸비니 정리의 증명	132
Chapter 15. 벡터장의 발산과 그린 정리	135
1. 발산함수	135
2. 평면의 발산정리	135
3. 회전도	135
4. 경계와 향	135
5. 그린정리	135
6. 부록: 발산함수와 부피변화	136
<b>Part VI. 면적분과 발산 정리 및 스토크스 정리</b>	<b>137</b>
Chapter 16. 곡면과 면적분	139
1. 곡면	139
2. 곡면의 넓이	139
3. 면적분	139
4. 벡터장과 면적분	140
Chapter 17. 발산 정리	143
1. 발산정리	143
2. 가우스 정리	143
3. 발산정리의 증명	143

Chapter 18. 회전장과 스톡스 정리	145
1. 회전장	145
2. 스톡스 정리	145
3. 스톡스 정리의 증명, 미분형식	145
Appendix. Bibliography	147



## Part I

# 급수와 테일러 전개





## CHAPTER 1

# 급수

1. 수열과 급수

2. 등비급수

3. 비교판정법

4. 멱근판정법

5. 비율판정법

6. 적분판정법

7. 교대급수와 절대수렴급수

로피탈의 정리를 이용하여도 좋다.

예제 1.7.1.  $p, q, r \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 급수의 수렴성을 판별하라:

$$\sum_{n \geq 1} n^p (\log n)^q (\log \log n)^r.$$

(1)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log n}$  은  $\int \frac{dx}{x \log x} = \log \log x$  와 비교할 수 있고, 따라서 발산한다.

(2)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\log n)^2}$  은  $\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = -\frac{1}{\log x}$  와 비교할 수 있고, 따라서 수렴한다.

(3)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{0.9}(\log n)^{100}}$  은

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{0.95}} \frac{n^{0.05}}{(\log n)^{100}}$$

로 다시 쓸 수 있고,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{0.05}}{(\log x)^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{0.0005}}{\log x} \right)^{100} = \infty$  이므로 발산한다.

(4)  $\sum_{n \geq 1} \frac{\log \log n}{n(\log n)^{1.1}}$  는

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\log n)^{1.05}} \frac{\log \log n}{(\log n)^{0.05}}$$

으로 다시 쓸 수 있으므로 수렴한다.

예제 1.7.2. 다음 급수의 수렴성을 판별하여라:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \sin \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4}.$$

풀이.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4} = \sum_{n \geq 1} \frac{-6n + 4}{n(n^2 - 5n + 4)}$$

는  $\sum \frac{1}{n^2}$  와 비교할 수 있으므로 수렴한다.

한편

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6}$$

이므로

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4} - \sin \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4}$$

는  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4} \right)^3$  과 비교할 수 있는데 이는  $\sum \frac{1}{n^3}$  과 비교할 수 있으므로 수렴한다. 따라서

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \sin \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4} + \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4} - \sin \frac{n+1}{n^2 - 5n + 4}$$

는 수렴한다.

예제 1.7.3. 다음 급수는 조건 수렴함을 보이시오.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$$

PROOF. 먼저  $b_0 = 0$ ,  $b_n := \sum_{k=0}^n \sin k$  로 두자. 이제  $e^i = \cos 1 + i \sin 1$  를 이용하면 등비급수 공식에서

$$\begin{aligned} b_n &= \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^n e^{ik} \right] = \operatorname{Im} \left[ \frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right] = \operatorname{Im} \left[ \frac{(e^i - e^{i(n+1)})(1 - \cos 1 + i \sin 1)}{(1 - \cos 1)^2 + \sin^2 1} \right] \\ &= \frac{(1 - \cos 1)(\sin 1 - \sin(n+1)) + \sin 1(\cos 1 - \cos(n+1))}{2 - 2 \cos 1} \end{aligned}$$

를 구할 수 있다. 여기서  $|b_n| \leq (2 \cdot 2 + 1 \cdot 2)/(2 - 2 \cos 1) = 3/(1 - \cos 1)$  를 얻는다. 한편

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{k(k+1)} + \frac{b_n}{n}$$

을 얻고,  $n \rightarrow \infty$ 에 따라 우변의 각항을  $1/n^2$ 과 비교하면,  $\sum_k b_k/(k(k+1))$ 은 절대수렴하는 급수임을 알 수가 있다. 따라서 주어진 급수는 수렴한다.

한편

$$A = \{(2k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$$

로 두면 임의의  $n \in A$ 에 대하여  $(2k + \frac{1}{2})\pi - 1 \leq n \leq (2k + \frac{1}{2})\pi$ 이므로  $\sin n \geq \sin(\frac{1}{2}\pi - 1) =: a > 0$ 이 성립한다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin k}{k} \right| \geq \sum_{n \in A} \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{n \in A} \frac{a}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{[(2k + 1/2)\pi]} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{8k} = \infty.$$

따라서 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다.  $\square$

## 8. 부록: 실수이야기



## CHAPTER 2

### 멱급수

#### 1. 멱급수

#### 2. 멱급수와 수렴반경

#### 3. 지수함수와 멱급수

지수함수를 아래와 같이 정의하자.

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

정의역은 실수집합 전체이다.

정리 2.3.1. 실수  $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $e^{a+b} = e^a e^b$  이 성립한다.

보조정리 2.3.2. 만일  $\sum_{n \geq 0} a_n$  와  $\sum_{n \geq 0} b_n$  가 절대수렴하는 급수이고, 각각의  $n$ 에 대하여  $c_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}$  로 정의하면  $\sum_{n \geq 0} c_n$  은 절대수렴하고 그 수렴값은

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{n \geq 0} b_n.$$

증명. 부분합의 차이를 다음처럼 계산해 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{2N} c_n - \sum_{n=0}^N a_n \sum_{n=0}^N b_n \right| &= \left| \sum_{n=0}^N \left( c_n - \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \right| + \left| \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{N+n+1-k} \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n a_{N+n+1-k} b_k \right) \right| \\ &\leq 0 + \sum_{n=0}^{2N} |a_n| \sum_{n=N}^{2N} |b_n| + \sum_{n=0}^{2N} |b_n| \sum_{n=N}^{2N} |a_n| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

따라서,  $\sum_{n=0}^{2N} c_n \rightarrow \sum_0^\infty a_n \sum_0^\infty b_n$  이고,

$$|c_{2N+1}| \leq \sum_{n=0}^{2N+1} |a_n| \sum_{n=N}^{2N+1} |b_n| + \sum_{n=0}^{2N+1} |b_n| \sum_{n=N}^{2N+1} |a_n| \rightarrow 0.$$

따라서,  $\sum_{n=0}^N c_n \rightarrow \sum a_n \sum b_n$  를 얻는다. 절대수렴성을 보기 위해서는 위의 계산에서  $a_n, b_n \geq 0$  경우를 생각하면 된다.  $\square$

정리 2.3.1의 증명.

$$\begin{aligned} e^a e^b &= \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} \sum_{n \geq 0} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} \quad (\text{by Lemma 2.3.2}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b} \end{aligned}$$

$\square$

이제 복수소  $z \in \mathbb{C}$  의 경우, 아래와 같이 정의하자.

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}[a_n z^n] + i \sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}[a_n z^n].$$

그러면

$$\begin{aligned} e^{a+ib} &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{(a+ib)^n}{n!} \right] + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{(a+ib)^n}{n!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{2|k, k=0}^n \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} a^{n-k} b^k}{k!(n-k)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{2|k, k=0}^n \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} a^{n-k} b^k}{k!(n-k)!} \\ &= e^a (\cos b + i \sin b). \end{aligned}$$

#### 4. 삼각함수와 멱급수

#### 5. 쌍곡함수

#### 6. 역삼각함수와 멱급수, 그리고 역함수 정리

#### 7. 부록: 미분방정식, 멱급수 기본정리의 증명

## CHAPTER 3

### 테일러 전개

#### 1. 코시의 평균값 정리

정리 3.1.1. 함수  $f$ 가 구간  $(a, b)$ 에서 미분가능하고  $[a, b]$ 에서 연속이면 다음을 만족하는  $c \in (a, b)$ 가 존재한다:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

#### 2. 로피탈의 정리

예제 3.2.1. 다음 급수의 수렴성을 판별하여라.

- (1)  $\sum_{n \geq 1} \arctan \frac{n+2}{n^2+2n+4}$ .  
(2)  $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n}}$ .

풀이. (1) 극한비교판정법을 이용하면

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t^2} = 1.$$

에서  $\sum \frac{n+2}{n^2+2n+4}$ 과 비교할 수 있고, 이는  $\sum \frac{1}{n}$ 과 다시 비교할 수 있으므로 발산한다.

(2) 극한비교판정법을 이용하면

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - \arctan t}{t^3} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sec^2 t - 1/(1+t^2)}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t^2)\sec^2 t - 1}{3t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \sec^2 t + 2(1+t^2)\sec^2 t \tan t}{6t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t + 2(1+t^2)\tan t}{6t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 + 4t \tan t + 2(1+t^2)\sec^2 t}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

에서  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ 과 비교할 수 있고, 따라서 수렴한다.

#### 3. 무한소와 근사다항식

목표.  $n$ 차 근사다항식

##### 3.1. 근사다항식.



**정의 3.3.1.** 원점 근방에서 정의된 함수  $f(x)$ 의 ( $x = 0$ 에서의)  $n$ 차 근사다항식은  $f(x) - p(x) = o(x^n)$ 와  $\deg p \leq n$ 을 만족하는 다항식  $p(x)$ 를 일컫는다.

**보조정리 3.3.2.** 만일 다항식  $p$ 가  $p = o(x^n)$ 과  $\deg p \leq n$ 을 만족한다면  $p = 0$ 이다.

**증명.**  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 로 두면  $p = o(x^n)$ 에서

$$a_0 = p(0) = 0, a_1 = p'(0) = 0, \dots, a_n = p^{(n)}(0)/n! = 0. \quad \square$$

**정리 3.3.3** (근사다항식의 유일성).  $f(x)$ 의  $n$ 차 근사다항식은 만일 존재한다면 유일하다.

**증명.** 만일  $p$ 와  $q$ 가  $f$ 의  $n$ 차 근사다항식이라면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - q(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - f(x) + f(x) - q(x)}{x^n} = 0$$

이고 따라서  $p - q = o(x^n)$ 이다. 한편  $p - q$ 는  $n$ 차 이하의 다항식이므로  $p = q$ 이다. □

**예제 3.3.4.** (1)  $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ .  $f$ 의 1차 근사다항식은  $p = 1 + 2x$ 이다. 왜냐하면,  $p$ 는 1차다항식이고  $f - p = 3x^2 = o(x)$ 이기 때문이다.

(2)  $n$ 차 다항식의  $n$ 차 근사다항식은 자기자신이다.

(3)  $\sin x$ 의 2차 근사다항식은  $p = x$ 이다. 왜냐하면,  $p$ 는 2차 이하이고  $\lim(\sin x - x)/x^2 = \lim(\cos x - 1)/(2x) = \lim -\sin x/2 = 0$ 이기 때문이다.

**3.2. 테일러 다항식.** 이제  $f$ 가 원점 근방에서  $n$ 번 미분가능하다 가정하자.

**정의 3.3.5.** 원점 근방에서  $n$ 번 미분가능한 함수  $f(x)$ 의 ( $x = 0$ 에서의)  $n$ 차 테일러 다항식은 다음과 같이 정의된다:

$$T_n f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

**예제 3.3.6.**  $f(x)$ 가 멱급수  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ 라면  $f^{(i)}(0) = i!a_i$ 이며, 따라서  $T_n f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 이다.

**정리 3.3.7.** 원점 근방에서  $n$ 번 미분가능한 함수  $f$ 의  $n$ 차 근사다항식은 존재하며,  $f$ 의  $n$ 차 테일러 다항식과 일치한다.

증명.  $p = T_n f$ 로 두자. 각  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ 에 대해  $f^{(i)}(0) - p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) - f^{(i)}(0) = 0$ 이다. 따라서  $f - p = o(x^n)$ 를 얻고, 근사다항식의 유일성에 의해  $p$ 는  $f$ 의 유일한  $n$ 차 근사다항식이다.  $\square$

예제 3.3.8.  $\sin x = x - x^3/3! + \dots$  이므로  $\sin x$ 의 2차 근사다항식은  $x$ 이며, 3차 근사다항식은  $x - x^3/3!$ 이다.

참고. (1) 요약하자면,  $n$ 차 근사다항식과  $n$ 차 테일러 다항식은  $n$ 번 미분가능한 함수에 있어서는 같다. 또한, 멱급수 함수의 경우에는  $n$ 차 테일러다항식이 멱급수 전개와  $n$ 차까지만 다른 부분합과 같다.  
 (2) 그렇다면 왜 근사다항식과 테일러 다항식을 따로 정의하였는가? 이론상, 근사다항식은 미분가능하지 않은 함수에도 적용할 수 있는 개념이다. 예를 들어

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

로 정의한다면  $f$ 는  $x = 0$ 에서 연속이지조차 않지만,  $p(x) = x$ 를 1차 근사다항식으로 가진다.

#### 4. 테일러정리

우리는  $n$ 번 미분가능한 함수  $f(x)$ 의  $n$ 차 근사다항식은 바로  $n$ 차 테일러 다항식임을 증명하였다. 그 오차  $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ 는  $f$ 의  $n$ 차 테일러 나머지항 (잉여항)이라 불리는데, 그 나머지항을 근사적으로 계산해보자.

보조정리 3.4.1. (1)  $n$ 번 미분가능한 함수  $f(x)$ 의  $n$ 차 테일러 나머지항은  $R_n f(x) = o(x^n)$ 을 만족한다.

(2)  $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x T_n f(x) dx + o(x^{n+1})$ 이 성립한다.

증명. 앞부분은  $T_n f(x)$ 가  $f$ 의  $n$ 차 근사다항식임에서 자명. 뒷부분은

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \int_0^x f(t) dt - T_n f(x) \right) / x^{n+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n f(x)}{(n+1)x^n} = 0$$

$\square$

예제 3.4.2. (1)  $\ln(1+x)$ 에 위의 보조정리를 적용하면,

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^n+o(t^n))dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).\end{aligned}$$

(2)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ 인 경우,

$$\begin{aligned}f' &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, f'' = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) (1+x)^{-3/2}, \\ f''' &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) (1+x)^{-5/2}, \\ f(x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

4.1. 나머지항의 계산. 이제  $R_n f(x)$ 를 보다 정확하게 계산해 보자.  $n+1$ 번 미분가능한 함수  $f$ 의  $n$ 차 근사 다항식  $T_n f$ 이 가지는 오차  $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ 를 계산해 보자.

$$\begin{aligned}f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)dt \\ f(x) - f(0) - f'(0)x &= \int_0^x f'(t)dt - f'(0)x \\ &= [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt - f'(0)x \\ &= - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \\ f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 &= \left[ -\frac{(t-x)^2}{2}f''(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)dt \\ &\quad - \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &= \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)dt\end{aligned}$$

이제 귀납적으로

$$f(x) - T_{n-1}f(x) = \int_0^x (-1)^{n-1} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

를 가정하면 부분적분을 이용하여

$$\begin{aligned} f(x) - T_n f(x) &= \int_0^x (-1)^{n-1} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \left[ (-1)^{n-1} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_0^x \\ &\quad - \int_0^x (-1)^{n-1} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \int_0^x (-1)^n \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

을 얻는다.

#### 정리 4.3 테일러 정리, 4.0.4

$I$ 는 0 을 포함하는 열린 구간이고  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 은  $n+1$  번 미분 가능한 함수라 가정하자.

- (1) 임의의  $x \in I$ 에 대하여  $f$ 의  $n$ 차 테일러 나머지는 다음을 만족한다:

$$R_n f(x) = f(x) - T_n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

- (2) 임의의  $x \in I$ 에 대하여 어떤  $x^*$ 가 0과  $x$  사이에 존재하여 다음을 만족한다:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

- (3)  $M_{n+1}(x)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$M_{n+1}(x) = \max \left\{ |f^{(n+1)}(t)| : t \in [0, x] \right\}.$$

그러면 다음이 성립한다.

$$|R_n f(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x).$$

참고. (1)  $f$ 의  $x=0$ 에서 테일러 전개란 다음 표현을 의미한다:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + R_n f(x).$$

(2) 만일  $x = 0$  근방에서  $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$  을 만족하는 상수  $M$ 이 있으면,  
 $R_n f(x) = o(x^n)$ 이 되어 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

증명. (1)은 위에서 증명하였다. 이제 아래 나오는 적분의 가중평균값 정리에 의해 어떤  $x^*$ 가 0과  $x$  사이에 존재하여

$$R_n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n+1)}(x^*) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

가 성립하여 (2)가 증명된다. (3)은 (2)에서 자명하다.  $\square$

**보조정리 3.4.4 (적분의 가중평균값 정리).** 닫힌 구간  $[a, b]$ 에 정의된 연속 함수  $f, g$ 에 대해 만일 항상  $g \geq 0$ 이고  $\int_a^b g > 0$ 이라 가정하면

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

를 만족하는  $c$ 가  $[a, b]$ 에 존재한다.

증명. 최대최소 정리에 의해  $f$ 는 최대값  $M$ 과 최소값  $m$ 을 얻는다. 그러면

$$m = \frac{\int_a^b mg}{\int_a^b g} \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq \frac{\int_a^b Mg}{\int_a^b g} = M.$$

이고 중간값정리에 의해  $f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$  인  $c$ 가 존재한다.  $\square$

**참고.** 적분의 가중평균값 정리를 항등함수  $g = 1$ 에 적용하면, 우리가 잘 알고 있는 적분의 평균값 정리

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

가 도출된다.

**예제 3.4.5.**  $f(x) = \cos x$ 이면  $T_{2n}f(x) = T_{2n+1}f(x)$ 이므로  $R_{2n}f(x) = R_{2n+1}f(x)$ 이다. 또한, 임의의  $i$ 에 대하여  $|f^{(i)}(t)| \leq 1$ 이므로,

$$|R_{2n}f(x)| = |R_{2n+1}f(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

**예제 3.4.6.**  $f(x) = \cosh x$ 이면  $T_{2n}f(x) = T_{2n+1}f(x)$ 이므로  $R_{2n}f(x) = R_{2n+1}f(x)$ 이다. 또한, 임의의  $t \in [0, x]$ 에 대하여  $|f^{(2i+2)}(t)| = \cosh t \leq \cosh x$

이므로,

$$|R_{2n}f(x)| = |R_{2n+1}f(x)| \leq \cosh x \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

### 5. 테일러 급수

원점 근방에서 무한번 미분가능한 함수  $f$  의 테일러 급수는:

$$Tf(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x)$$

으로 정의된다.

**예제 3.5.1.** (1)  $f(x) = e^x$  이면

$$Tf(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} x^i$$

이고 이 수렴반경은  $\infty$  이므로 임의의  $x$  에 대하여  $Tf(x) = f(x)$  가 성립한다.

(2)  $f(x) = \ln(1+x)$  이면

$$Tf(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i}$$

이고  $x \in (-1, 1]$  에서  $Tf(x) = f(x)$  가 성립한다.  $x \leq -1$  이나  $x > 1$  이면  $Tf(x)$  는 수렴하지 않는다.

#### 5.1. 비해석함수.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

로 정의하자.

**명제 3.5.2.**  $f$  는 무한급함수이고,  $Tf(x) = 0$  이다.

원점근방에서 멱급수함수는 해석함수라고 불리기도 한다. 한편, 만일  $f$  가 해석함수라면 멱급수 표현의 유일성에 의해  $f(x) = Tf(x)$  여야만 한다. 하지만  $f \neq 0$  이므로  $f$  는 비해석함수이다.

**증명.** 먼저  $x \neq 0$  일 때 무한급함수임은 자명하다. 이제  $x > 0$  일 때

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$$

이고  $f'(x) = e^{-1/x}/x^2$  이다. 귀납적으로, 만일  $f^{(i)}(0) = 0$  이고  $f^{(i)}(x) = p_i(x)e^{-1/x}$  을 만족하는 유리함수  $p_i$  가 있었다면

$$f^{(i+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p_i(x)e^{-1/x}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} tq_i(t)e^{-t} = 0$$

이고  $f^{(i+1)}(x) = p_i'e^{-1/x} + p_ie^{-1/x}/x^2 = p_{i+1}(x)e^{-1/x}$  꼴로 쓸 수 있다. 따라서  $f$  는 무한급이고  $Tf = 0$  이다.  $\square$

요약하면

- (1)  $f$  가  $n$  번 미분가능하면  $Tf_n$  과  $n$  차 근사다항식은 같다.
- (2)  $f$  가 멱급수함수  $\sum_n a_n x^n$  이면  $Tf_n$  과  $f$  의 멱급수 전개  $n$  항까지의 부분합은 같다.
- (3)  $f$  가 멱급수함수  $\sum_n a_n x^n$  이면 무한급수함수이고 수렴반경 안에서는  $f(x) = Tf(x) = \sum_n a_n x^n$  이다.

숙제. p.136, 1(3), 4, 5

## 5.2. $\ln(1+x)$ 의 나머지항.

목표.  $f(x) = \ln(1+x)$  의 테일러급수  $Tf(x)$  를 구하고  $Tf(1) = f(1)$  을 증명한다.

$|t| < 1$  일 때 멱급수 전개

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

를 생각하자. 멱급수의 기본정리에 의해  $|x| < 1$  일 때

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

를 얻는다. 따라서  $f(x) = \ln(1+x)$  라 하면  $x = 0$  근방에서  $f$  의 테일러 다항식은 (멱급수의 부분합과 일치하므로):

$$T_n f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i}.$$

우리는  $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x) = o(x^n)$  임을 안다. 보다 구체적으로 아래의 부등식이 성립한다.

명제 3.5.3. 임의의  $x \geq 0$ 에 대하여,

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$x \in [0, 1)$  일 때는 교대급수 정리에 의해 성립한다. 하지만 우리는  $x \geq 1$  일 때도 성립함을 증명하여야 한다. 임의의  $t \neq -1$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-t)^{n-1}$$

따라서 임의의  $x > -1$ 에 대해

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n dt}{1+t} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} = T_n f(x) \\ f(x) - T_n f(x) &= R_n f(x) \\ &= \int_0^x \frac{(-1)^n t^n dt}{1+t}. \end{aligned}$$

이제  $x > 0$ 이라면,

$$|R_n f(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{t^n dt}{1+t} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

가 되어 증명이 끝난다.

한편, 이제  $x = 1$ 을 대입하는 것이 허용되어서

$$\left| \ln 2 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

을 얻는다. 예를 들어,  $\ln 2 - (1 - 1/2 + 1/3 - \dots + 1/9)$ 은  $1/10$ 보다 작거나 같다. 또한  $n \rightarrow \infty$ 에 대하여

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

를 얻는다.  $x > 1$  일 때는  $T_n f(x)$ 가 수렴하지 않는다.

### 5.3. $\arctan x$ 의 나머지항.

목표.  $f(x) = \arctan x$ 의 테일러급수  $Tf(x)$ 를 구하고  $Tf(1) = f(1)$ 을 증명한다.



$\log(1+x)$ 의 나머지항에 대한 근사와 매우 비슷하게  $\arctan x$ 를 공부할 수 있다.  $|t| < 1$  일 때 멱급수 전개

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

를 생각하자. 멱급수의 기본정리에 의해  $|x| < 1$  일 때

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

를 얻는다. 따라서  $f(x) = \arctan x$ 라 하면  $x = 0$  근방에서  $f$ 의 테일러 다항식은 다음과 같다:

$$T_{2n+1}f(x) = T_{2n+2}f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

이제  $f$ 의 테일러 나머지항의 상한을 계산해 보자. 다시 처음부터, 임의의  $t$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} &= 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-t^2)^n \\ \arctan x - \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1} dt}{1+t^2} &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2i+1} = T_{2n+1}f(x) \\ f(x) - T_{2n+1}f(x) &= R_{2n+1}f(x) = R_{2n+2}f(x) = \\ &= \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2} dt}{1+t^2} \\ |R_{2n+1}f(x)| = |R_{2n+2}f(x)| &\leq \int_0^x \left| \frac{t^{2n+2} dt}{1+t^2} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \end{aligned}$$

따라서 임의의  $x$ 에 대하여 다음 부등식을 얻는다:

$$\left| \arctan x - \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

특히 이제  $x = 1$ 을 대입하는 것이 허용되어서

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{2i+1} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

을 얻는다. 예를 들어,  $\pi/4 - (1 - 1/3)$ 은  $1/5 = .2$ 보다 작거나 같다. 또한  $n \rightarrow \infty$ 에 대하여

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

를 얻는다.

[Mathematica(R)]

```
M = 100;
```

```
pi1[k_] := 4 Sum[(-1)^n/(2 n + 1), {n, 0, k}] // N;
```

```
lodd = Table[pi1[k], {k, 0, M, 2}];
```

```
leven = Table[pi1[k], {k, 1, M, 2}];
```

```
ListPlot[{lodd, leven}, PlotLegends -> {"Odd", "Even"}]
```

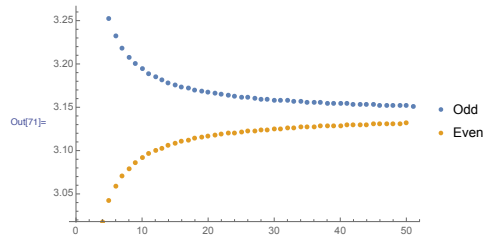


FIGURE 1.  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$

#### 5.4. 이항정리.

목표.  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ 의 테일러급수  $Tf(x)$ 를 구하고  $Tf(1) = f(1)$ 을 증명한다.

간단히,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{1/3-1}, f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) (1+x)^{1/3-2},$$

$$f'''(x) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) (1+x)^{1/3-3}, \dots$$

에서

$$f'(0) = \frac{1}{3}, f''(0) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right), f'''(0) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right), \dots$$

$$f^{(i)}(0) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{3} - i + 1\right).$$

임의의 실수  $\alpha$ 에 대하여 이항계수를 다음과 같이 정의하면

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}.$$

$$T_n f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{1/3}{i} x^i, \quad T f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/3}{i} x^i$$

이제

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \binom{1/3}{i} / \binom{1/3}{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i+1}{1/3-i} = -1$$

이므로 극한비율판정법에 의해 수렴반경은 1이 된다.  $t > 0$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \right| &= \left| \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}-1\right) \left(\frac{1}{3}-2\right) \cdots \left(\frac{1}{3}-n\right)}{(n+1)n(n-1)\cdots 1} \right| |1+t|^{1/3-n-1} \\ &= \frac{1}{3(n+1)} \left| \frac{\left(n-\frac{1}{3}\right) \left(n-1-\frac{1}{3}\right) \left(n-2-\frac{1}{3}\right) \cdots \left(1-\frac{1}{3}\right)}{n(n-1)\cdots 1} \right| \frac{1}{(1+t)^{n+2/3}} \\ &\leq \frac{1}{3(n+1)} \end{aligned}$$

이제  $x > 0$ 이면

$$|f(x) - T_n f(x)| = |R_n f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \right| x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{3(n+1)}$$

를 얻는다. 따라서 임의의  $0 \leq x \leq 1$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n f(x) = 0$ 이므로  $f(x) = T f(x)$ 를 얻는다. 특히  $x = 1$ 을 대입하면  $T f(1) = f(1)$ 을 얻는다.

정리 3.5.4. 임의의 실수  $\alpha$ 에 대하여  $(1+x)^\alpha$ 의 테일러 급수(이항급수)는

$$T f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

가 된다. 이항급수의 수렴반경은 1이다.

위의 정리에서  $\alpha$ 가 자연수이면 잘 알려진 이항전개가 된다. 한편

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \binom{\alpha}{i} / \binom{\alpha}{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i+1}{\alpha-i} = -1$$

이므로 극한비율판정법에 의해 이항급수의 수렴반경은 1임을 알 수 있다.

정리 3.5.5.  $|x| < 1$ 이면  $(1+x)^\alpha$ 와 그 테일러급수는 일치한다. 즉,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i.$$

이 정리는 뉴턴이 처음 주장하였고 (1676), 오일러가 불완전한 증명을 하였으면 (1774), 가우스가 완전히 증명하였다 (1812).

PROOF.  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$ 로 두자.  $f(x)$ 이  $|x| < 1$ 에서 절대수렴함은 이미 확인하였다. 이제  $|x| < 1$ 에서

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} i \binom{\alpha}{i} x^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} i \binom{\alpha}{i} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( (i+1) \binom{\alpha}{i+1} + i \binom{\alpha}{i} \right) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)((\alpha-i)+i)}{i!} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha \frac{\alpha \cdots (\alpha-i+1)}{i!} x^i = \alpha f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((1+x)^{-\alpha} f(x))' &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x) + (1+x)^{-\alpha} f'(x) \\ &= (1+x)^{-\alpha-1} (-\alpha f + (1+x)f') = 0 \end{aligned}$$

이고  $(1+0)^{-\alpha} f(0) = 1$  이므로  $f(x) = (1+x)^\alpha$ 를 얻는다.  $\square$

**5.5. 참고: 아벨 정리.** 사실 앞서 얘기한  $Tf(1) = f(1)$ 인 예들은 다음 정리의 특수한 경우이다:

정리 3.5.6 (아벨의 정리). 수렴반경이  $R$ 인 멱급수 함수

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

에 대하여 만일  $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ 이 수렴하면

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$$

이다.

아벨 정리의 증명은 해석개론 과정 중에 배우게 된다. (참고. 본 수업의 중간/기말고사에서 아벨의 정리를 증명없이 사용하면 감점된다.)

이론 물리학에서는 다음의 “등식”이 실험적으로 관찰되기도 한다 (캐시미어 효과):

$$(1) \quad \{euler1\} \quad 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad \{euler2\} \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

물론 우리는 일반적인 수렴의 정의로는 위의 두 급수가 발산함을 알고 있다. 하지만 해석적 연장 (*analytic continuation*)이라는 복소해석학의 도구를 사용하면 저 두 “등식”의 의미를 엄밀하게 정의하고 증명할 수 있다. 보다 자세하게는, 먼저  $\zeta_0: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  을

$$\zeta_0(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

로 정의하자. 복소해석학을 이용하면 위의  $\zeta_0$ 는 리만 제타함수라 불리는 해석함수  $\zeta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 로 유일하게 확장할 수 있고 등식 (2)은 이제 수학적으로 엄밀하게,  $\zeta(-1) = -1/12$ 임을 말하는 것이다.

여기서는 이러한 도구 없이, 아벨정리에 근거하여 오일러가 등식 (1,2)를 어떻게 도출하였는지 알아보자.

먼저  $|x| < 1$ 에 대하여

$$\begin{aligned} -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots &= -\frac{1}{1+x} \\ 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots &= \frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

오일러는, 아벨 정리에 의해 마지막 식에서  $\lim_{x \rightarrow 1^-}$ 를 취할 수 있다고 생각했고 따라서 (1)을 다음처럼 유도하였다:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

이제  $s = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ 로 두면

$$-3s = s - 4s = (1+2+3+4+\cdots) - 2(2+4+6+\cdots) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

따라서 우리는 다음을 예측해 볼 수 있다.

## 정리 5.7

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

물론 위의 논의를 수학적으로 엄밀하게 만들기 위해서는 해석적 확장에 대한 지식이 필요하다. 현재 이 책의 수준에서는  $1 - 2 + 3 - \dots$  나  $1 + 2 + 3 + \dots$  이 발산함을 다시한번 강조하고자 한다.

문제 5.1. 다음을 (엄밀하지 않게) 계산하여보라:

$$\zeta(-3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$$

리만 제타함수의 계산은 쿼텀장 이론 (캐시미어 효과) 외에도 열역학 (슈테판-볼츠만 법칙), 통계물리 (보스-아인슈타인 응축), 양자역학 (스핀 파동), 초끈이론 등에 핵심적으로 사용된다.

## 5.6. 적분의 근사.

예제 3.5.8 (2013년도 1학기 미적분학 및 연습 1 중간고사). 정적분  $\int_0^{0.1} \arctan t \, dt$  의 값을 오차가  $10^{-7}$  이내가 되도록 구하시오.

풀이.  $|x| < 1$  에 대하여

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n \geq 0} (-t^2)^n \, dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

또한  $0 \leq x < 1$  에 대하여 이는 교대급수이고 각 항의 절대값이 단조감소하며 0으로 수렴하므로

$$\begin{aligned} I_M(x) &= \left| \int_0^x \arctan t - \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \, dt \right| \leq \int_0^x \left| \arctan t - \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right| dt \\ &\leq \int_0^x \frac{t^{2M+1} dt}{2M+1} = \frac{x^{2M+2}}{(2M+1)(2M+2)}. \end{aligned}$$

따라서  $I_2(0.1) \leq (0.1)^6/(30) < 10^{-7}$  이고 원하는 근사값은

$$\int_0^{0.1} \arctan t \, dt \approx \int_0^{0.1} \sum_{n=0}^1 (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \, dt = \frac{(0.1)^2}{2} - \frac{(0.1)^4}{12}.$$

참고.

$$\int_0^{0.1} \arctan t \, dt \approx 0.0049917, \quad \int_0^{0.1} \sum_{n=0}^1 (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \, dt \approx 0.00499167.$$

### 6. 임의의 점을 기준으로 한 테일러 전개

정의 3.6.1.  $x = a$  근방에서 정의된 함수  $f(x)$  의 ( $x = a$ 에서의)  $n$ 차 근사 다항식은  $f(x) - p(x) = o((x - a)^n)$  와  $\deg p \leq n$  을 만족하는 다항식  $p(x)$  를 일컫는다.

$$f(x) - p(x) = o((x - a)^n) \text{ 는}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n} = 0$$

의 의미한다.

이제 주어진 함수  $f(x)$  를  $x = a$  에서 근사하는 방법을 생각해보자.  $g(x) = f(x + a)$  로 두면

$$T_n g(x) = \sum_{i=0}^n \frac{g^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} x^i$$

이제  $T_n^a f(x) = T_n g(x - a)$  로 치환하면

$$T_n^a f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$

이고

$$R_n g(x - a) = g(x - a) - T_n g(x - a) = o((x - a)^n)$$

에서

$$R_n^a f(x) := R_n g(x - a) = f(x) - T_n^a f(x) = o((x - a)^n).$$

따라서  $T_n^a f$  는  $f$  의 근사다항식이다. 한편  $g$  가  $n + 1$  번 미분가능하면 테일러 정리에서

$$R_n g(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

을 만족하는  $c$  가  $a$  와  $x$  사이에 존재한다.

정리 3.6.2 (정리 6.0.1). 구간  $I$  에서 정의된  $n$  번 미분가능한 함수  $f$  에 대하여

(1) 구간의 점  $x = a$  에서  $f$  의  $n$  차 근사다항식은  $T_n^a f(x)$  이다.

(2) 만일  $f$ 가  $n+1$  번 미분가능하면

$$R_n^a f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

을 만족하는  $c$ 이  $a$ 와  $x$  사이에 존재한다.

**예제 3.6.3.** (1)  $f(x) = e^x$  의  $x = 1$ 에서의 근사다항식은  $f^{(i)}(1) = e$  이므로  $T_3^1 f(x) = e + e(x-1) + e(x-1)^2/2 + e(x-1)^3/6$  이고  $f(x) = e + e(x-1) + e(x-1)^2/2 + e(x-1)^3/6 + o((x-1)^3)$  이다.  
 (2)  $f(x) = x^2$  의  $x = 1$ 에서의 근사다항식은  $f(1) = 1, f'(1) = 2, f''(1) = 2$  이므로  $T_1^1 f(x) = 1 + 2(x-1)$  이고  $T_2^1 f(x) = 1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2/2 = x^2 = f$  이다.

**보조정리 3.6.4.**  $f$ 가  $n$ 차 이하의 다항식이면 임의의  $a \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $f = T_n^a f$  이다.

**증명.**  $f = T_n^a f = \sum_{i=0}^n a_i (x-a)^i$  꼴로 쓰자.  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ 에 대하여  $f^{(i)}(a) - (T_n^a f)^{(i)}(a) = 0$ 이다. 이는  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ 를 의미한다.  $\square$

**정의 3.6.5.**  $x = a$ 에서 무한번 미분가능한 함수  $f$ 의 테일러급수는 다음과 같이 정의된다:

$$T^a f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n.$$

**예제 3.6.6.**  $f(x) = 1/x$ 에 대하여  $f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 2, f'''(1) = -6, \dots, f^{(i)}(1) = (-1)^i i!$ 이다. 따라서  $T^1 f(x) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (x-1)^i$ 이다. 이 급수는  $|x-1| < 1$ 일 때만 수렴한다.

**예제 3.6.7** (2014년도 1학기 미적분학 및 연습 1 중간고사). 함수  $f(x) = e^x + e^{2x}$ 의 역함수  $g(x)$ 가  $x > 0$ 에서 정의됨을 증명하고  $T_2^2 g(x)$ 를 구하시오.

**풀이.**  $y = f(x) = e^x + e^{2x}$ 로 두면  $y' = e^x + 2e^{2x} > 0$ 이어서  $f$ 는 강증가 함수이고, 그 치역은  $(0, \infty)$ 이다. 따라서  $x > 0$ 에서  $g(x) = f^{-1}(x)$ 가 정의된다.

이제  $y = g(x)$ 로 두면  $x = f(y) = (e^y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$  이고 따라서  $e^y = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ 이므로

$$y = g(x) = \log \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right), \quad g(2) = 0.$$



또한  $x = f(y)$  에서  $1 = f'(y)y' = f'(y)g'(x)$  이고, 따라서

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y + 2e^{2y}} = \frac{1}{x + e^{2g(x)}}, \quad g''(x) = -\frac{1 + 2g'(x)e^{g(x)}}{(x + e^{2g(x)})^2}.$$

따라서  $g'(2) = \frac{1}{3}$ ,  $g''(2) = -\frac{5/3}{3^2} = -5/27$  이어서

$$T_2^2 g(x) = g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{g''(2)}{2}(x-2)^2 = \frac{1}{3}(x-2) - \frac{5}{54}(x-2)^2.$$

속제. p.141, 4.

## 7. 부록: 로피탈 정리의 증명

풀이: 탐구문제 중에서

문제 7.1 (p.144, 3). 다음 급수가 수렴하기 위한  $x$ 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

힌트. 이는 예제 1.7.3와 매우 유사하다. 먼저  $b_0 = 0, b_n := \sum_{k=0}^n \sin kx$  로 두자. 이제  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  를 이용하면 등비급수 공식에서

$$b_n = \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right] = \frac{(1 - \cos x)(\sin x - \sin(n+1)x) + \sin x(\cos x - \cos(n+1)x)}{2 - 2 \cos x}$$

를 구할 수 있다. 여기서  $|b_n| \leq 3/(1 - \cos x)$  를 얻는다. 한편

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{k(k+1)} + \frac{b_n}{n}$$

을 얻고,  $n \rightarrow \infty$  에 따라 우변은  $x \neq 0$  일 때 절대수렴하는 급수임을 알 수가 있다.  $x = 0$  일 때 주어진 급수의 수렴은 자명하므로, 따라서 주어진 급수는 임의의  $x$  에 대하여 수렴한다.

문제 7.2. 열린 실수 구간에 정의된 삼급 가역함수  $f$ 의 슈발츠 미분 (Schwarzian derivative)  $S(f)$  는

$$S(f) = \frac{f'''}{f''} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2$$

으로 정의된다. 다음을 증명하라:

$$S(g)(a) = 6 \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{g'(x)g'(a)}{(g(x) - g(a))^2} - \frac{1}{(x - a)^2} \right).$$

참고. 후에 편미분을 정의하고 나면 이변수 함수

$$F(x, y) = \log \left( \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right)$$

를 이용하여 문제 7.2는

$$S(g)(y) = 6 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x, y) \Big|_{x=y}$$

처럼 다시 쓸 수 있게 된다.

문제 7.3. 다음을 증명하여라.

(1)  $S(f \circ g) = (S(f) \circ g) \cdot (g')^2 + S(g)$ .

(2) 만일  $f(x_0) = x_0$  이고  $S(f)(x_0) < 0$  이면  $f$ 를  $n \geq 1$  번 합성한 함수  $f^n$ 에 대하여  $S(f^n)(x_0) < 0$ 이다.

(3)  $-\frac{1}{2\sqrt{dy/dx}}S(y) = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\sqrt{dy/dx}} \right)$ .

(4)  $S(y)(x) = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 S(x)(y)$ .

(5)  $S(f)$ 가 항상 0일 필요충분조건은 어떤  $a, b, c, d$ 가 존재하여 모든  $x$ 에 대하여 다음이 성립하는 것이다:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$



## Part II

### 벡터와 행렬



## CHAPTER 4

### 좌표공간과 좌표계

#### 1. 좌표공간

목표.  $\mathbb{R}^n$ , 오른손 법칙, 벡터와 점, 합, 상수배, 거리.

우리는  $n$ -공간을

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

로 정의한다.  $n$ -공간의 각 점은 또한  $n$ -차원 벡터라고도 불린다.

$n$ -공간의 두 점  $P = (x_i), Q = (y_i)$ 와 실수  $c$ 가 주어지면 두 점의 합과 상수배는

$$P + Q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$cP = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$$

로 정의하며 그 거리는 다음과 같이 정의한다.

$$d(P, Q) = |P - Q| = |P + (-Q)| = |PQ| = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2.$$

예제 4.1.1.  $P = (1, 2, 3), Q = (0, 1, -2)$ 에 대하여

$$P + Q = (1, 3, 1), 2P = (2, 4, 6), |P - Q| = |PQ| = \sqrt{1 + 1 + 25} = 3\sqrt{3}$$

이다.

또한 3차원 공간에서 좌표계는 오른손 법칙을 이용하려 그리도록 한다.

숙제. p.156, 4, 11.

#### 2. 극좌표계, 영역의 넓이 (4.2, 9.5)

목표. 평면의 직교좌표와 극좌표, 변환공식, 넓이, 원, 직선, 쌍곡선, 나선 (spiral), 장미잎

극좌표  $(r, \theta)$ 는 직교좌표  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 에 해당한다. 또한 그 넓이는  $dxdy = r dr d\theta$ 에 해당한다.

예제 4.2.1. (1) 원  $r = a$ .

(2) 원  $r = \cos \theta$ . 이를 직교좌표로 쓰면  $x^2 + y^2 = x$ 이다.

[WolframAlpha.com] `r=cos \theta`

(3) 원호  $r = a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

(4) 직선  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

(5) 쌍곡선  $r^2 \cos 2\theta = x^2 - y^2 = a^2$  or  $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ . 이는  $y = x, y = -x$ 를 점근선으로 가진다. (그림 1 (a))

[WolframAlpha.com] `r=1/sqrt(cos (2 \theta))`

(6) 심장형곡선 (Cardioid)  $r = 1 + \cos \theta$ .

[WolframAlpha.com] `r = 1+cos \theta`

(7) 장미잎 (그림 1 (b), (c))  $r = \sin k\theta$ .

[WolframAlpha.com] `r =sin (3 \theta)`

(8)  $r = 1 + \frac{1}{10} \sin(10t)$ . (그림 1 (d))

[WolframAlpha.com] `PolarPlot[1 + 1/10 Sin[10 t], {t, 0, 2 Pi}]`

예제 4.2.2.  $f(\theta)$ 가 증가함수 이면  $r = f(\theta)$ 는 와선 (spiral)이 된다.

(1) 와선 (spiral)  $r = k\theta$ . (그림 1 (e))

[WolframAlpha.com] `r = \theta`

(2) 쌍곡와선 (hyperbolic spiral)  $r = k/\theta$ .

[WolframAlpha.com] `r = 3/ \theta`

(3) 로그와선  $r = r_0 e^{k\theta}$ .

[WolframAlpha.com] `r = 2 e^(\theta/10), 0<=\theta<=10 \pi`

(4)  $r = \log t$ . (그림 1 (f))

[WolframAlpha.com]

`PolarPlot[Log[t], {t, 0, 10 Pi}]`

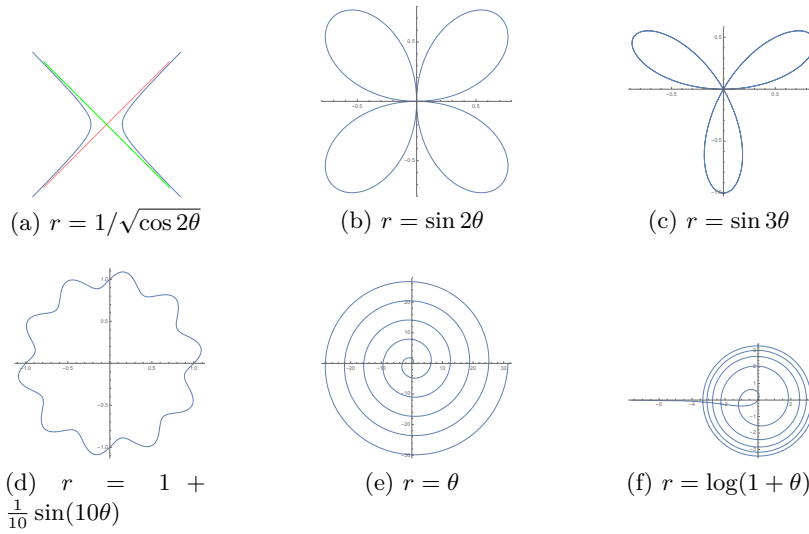


FIGURE 1. 극좌표 곡선

예제 4.2.3. 장미잎곡선  $r = \sin 2\theta$  중 한 잎,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 의 넓이를 구하여 보자.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^{\sin \theta} r dr d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{4} d\theta \\ &= \left[ \frac{\theta}{4} - \frac{\sin 2\theta}{8} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

예제 4.2.4. Cardioid 곡선  $r = 1 + \cos \theta$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/3$ 로 둘러싸인 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \int_{r=0}^{1+\cos \theta} r dr d\theta &= \int_0^{\pi/3} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} + \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{4} d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

그림 2에 cardioid와 위의 영역이 각각 (a)와 (b)에 나와 있다. 한편 cardioid 전체에 의해 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1+\cos \theta} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \left[ \frac{3}{4} + \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{8} \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

숙제. p.168, 4(9), 6.

권장: p.349 연습문제



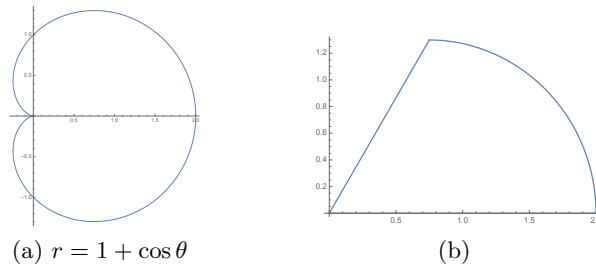


FIGURE 2. Cardioid와 그 일부

### 3. 원기둥 좌표계와 구면 좌표계

목표. 원기둥좌표계, 구면좌표계, 변환공식, 원뿔, 아이스크림.

원기둥좌표  $(r, \theta, z)$ 는 직교좌표  $(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ 에 해당한다.

예제 4.3.1.  $z$  축을 포함하고  $x = \frac{1}{2}$ 를 중심축으로 하는 원기둥의 방정식은

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

이다. 이는 원기둥좌표계로

$$r^2 - r \cos \theta = 0$$

즉 극좌표와 같은  $r = \cos \theta$ 에 해당한다. (그림 3)

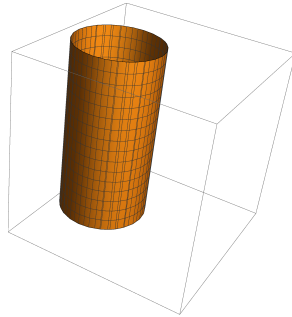


FIGURE 3. 원기둥좌표계

구면좌표  $(\rho, \theta, \phi)$ 는 직교좌표  $(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$ 에 해당한다.

예제 4.3.2.  $\phi = \pi/4$ 는 원뿔이다 (그림 4 (a)). 이를 직교좌표로 표현하면  $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi = \frac{\rho^2}{2} = z^2$ 이어서

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

이 된다.

[WolframAlpha.com]

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

**예제 4.3.3.**  $(\rho, \theta, \phi) = (1, k\phi, \phi)$  그래프를 생각해 보자.  $k = 0$  인 경우는 경도( $\theta$ )가 일정하고 위도( $\phi$ )만 변하는 선, 즉 경도선(longitude)이 된다.  $k \neq 0$  인 경우,  $0 \leq \phi \leq \pi$ 에 대하여, 북극( $\phi = 0$ )에서 남극( $\phi = \pi$ )까지 내려가되 위에서 내려보았을 때 회전하는 곡선이 된다. (그림 4 (b)) 보다 정확하게 그 모양을 알기 위하여 곡선

$$\rho = 1, \theta = k\phi$$

를  $xy$ -평면으로 정사영시켜 나오는 곡선은 직교좌표로 표현하면  $x = \rho \sin \phi \cos \theta = \sin \frac{\theta}{k} \cos \theta$ 와  $y = \rho \sin \phi \sin \theta = \sin \frac{\theta}{k} \sin \theta$ 로 주어진다. 이는 극좌표로 표현하였을 때

$$r = \sin \frac{\theta}{k}, 0 \leq \theta \leq k\pi$$

에 해당한다. (그림 4 (c))

[WolframAlpha.com]

`ParametricPlot3D[{sin(t)cos(3t), sin(t)sin(3t), cos(t)}, {t, 0, Pi}]`

**예제 4.3.4** (아이스크림). 중심이  $(0, 0, \frac{1}{2})$ 이고 반지름이  $\frac{1}{2}$ 인 구면을 구면좌표계로 표현하여 보자. 먼저  $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ 에서  $\rho = \cos \phi$ 를 얻고, 이는 극좌표 곡선  $r = \cos \theta$ 를  $xz$ -평면 위에 그린 후에  $z$  축을 중심으로  $2\pi$ 만큼 회전시켜 얻을 수 있다. 한편  $r = \cos \theta$ 는 원  $x^2 + y^2 = x$ 이다. 이러한 구에서 위의 절반인 북반구와 앞의 예제에 나오는 원뿔을 함께 생각하면 아이스크림 콘 모양이 나온다.

**참고.** 국제 ISO 표준 80000-2 (Figure 5)에 따르면 우리가 사용하는 변수  $(r, \theta, \rho, \phi)$ 는  $(\rho, \phi, r, \theta)$ 로 고쳐 쓰여야 한다. 하지만 이러한 표준이 수학에서 잘 지켜지는 것은 아니기 때문에, 책마다 그 의미를 명확하게 해 주는 것이 좋다.

숙제. p.174, 3, 5.

#### 4. 유클리드 공간:생략

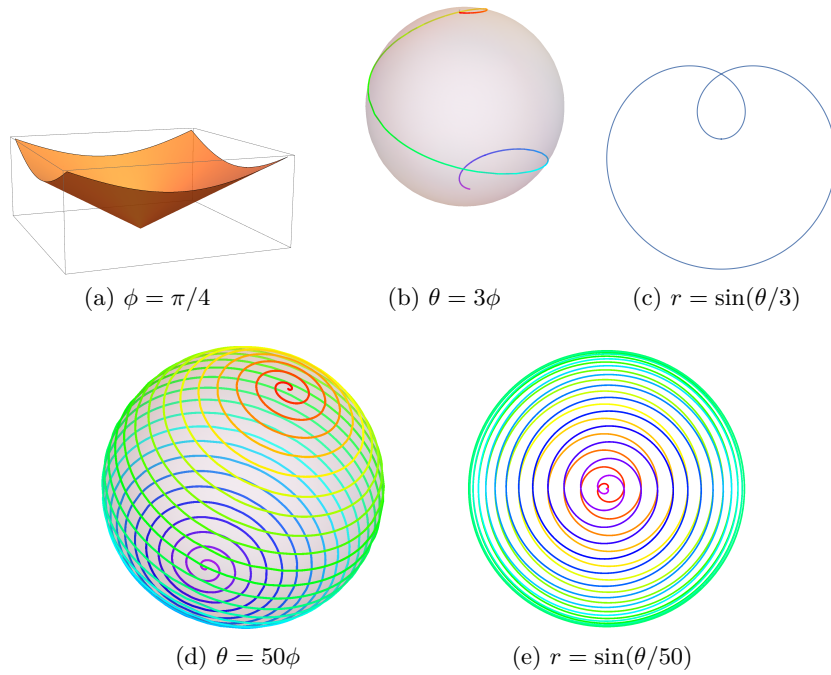


FIGURE 4. 구면좌표계

## 16 Coordinate systems

Item No.	Coordinates	Position vector and its differential	Name of coordinates	Remarks
2-16.1 (11-12.1)	$x, y, z$	$r = xe_x + ye_y + ze_z$ $dr = dx e_x + dy e_y + dz e_z$	Cartesian coordinates	$x_1, x_2, x_3$ for the coordinates and $e_1, e_2, e_3$ for the base vectors are also used. This notation easily generalizes to $n$ -dimensional space. $e_x, e_y, e_z$ form an orthonormal right-handed system. See Figures 1 and 4. For the base vectors, $i, j, k$ are also used.
2-16.2 (11-12.2)	$\rho, \varphi, z$	$r = \rho e_\rho + z e_z$ $dr = d\rho e_\rho + \rho d\varphi e_\varphi + dz e_z$	cylindrical coordinates	$e_\rho(\varphi), e_\varphi(\varphi), e_z$ form an orthonormal right-handed system. See Figure 2. If $z = 0$ , then $\rho$ and $\varphi$ are the polar coordinates.
2-16.3 (11-12.3)	$r, \vartheta, \varphi$	$r = r e_r$ $dr = dr e_r + r d\vartheta e_\vartheta + r \sin\vartheta d\varphi e_\varphi$	spherical coordinates	$e_r(\vartheta, \varphi), e_\vartheta(\vartheta, \varphi), e_\varphi(\vartheta, \varphi)$ form an orthonormal right-handed system. See Figure 3.

NOTE If, exceptionally, instead of a right-handed system (see Figure 4), a left-handed system (see Figure 5) is used for certain purposes, this shall be clearly stated to avoid the risk of sign errors.

FIGURE 5. From *International Standard ISO 80000-2:2009(E)*.

## CHAPTER 5

# 벡터

### 1. 평행이동

정의 5.1.1 (평행사상).  $v \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여,  $n$ -공간에서  $v$  만큼 움직이는 평행사상이란 다음에 의해 정의된 변환  $T_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 을 의미한다:

$$T_v(x) = x + v, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

예제 5.1.2.  $T_{(1,0,0)}(1, 2, 3)$

$$T_v \circ T_w = T_{v+w} = T_w \circ T_v$$

$$T_v \circ T_{-v} = \text{Id}.$$

### 2. 유향선분과 벡터

물리학적인 정의에 대하여 알아보자.

유향선분이란 공간 상에 시점의 위치와, 방향과, 크기가 있는 기하학적인 양이다.

벡터란 크기와 방향이 있는 양으로서, 유향선분에서 시점의 위치를 잊음으로써 얻을 수 있다.

유향선분  $\overline{AB}$ 가 나타내는 벡터의 좌표는  $B - A$ 이고, 이러한 벡터 역시  $\overline{AB}$ 라고 쓴다. (혼동의 여지가 없는 경우)

예제 5.2.1.  $A = (1, 2, 3), B = (2, 4, 5)$ .  $\overline{AB}$

물리학적이거나 기하학적인 의미를 강조할 때 벡터와 공간 상의 점을 구별하여 쓸 수는 있으나, 수학적으로 벡터는 공간 상의 점과 동일한 대상이다.

벡터의 합과 상수곱은 점의 연산처럼 정의한다. (평행사변형 법칙)

벡터의 크기  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_i v_i^2}$ .

영벡터

단위벡터

표준단위벡터

**예제 5.2.2.**  $A = (2, 1), B = (-1, 3)$ 에 대하여  $|\overrightarrow{AB}| = |B - A| = |(-3, 2)| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ .

영벡터가 아닌 두 벡터  $a$ 와  $b$ 가 같은 방향이라 함은  $b = ta$ 를 만족하는 양의 실수  $t$ 가 존재한다는 것이다.

두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 평행하다는 것은 어떤 실수  $c$ 가 존재하여  $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$  혹은  $\mathbf{a} = c\mathbf{b}$ 가 성립한다는 것이며, 이 때 우리는  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 로 쓴다. 특히 영벡터  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ 은 임의의 벡터와 평행한 것으로 정의한다.

**예제 5.2.3.**  $(1, 2, 3)$ 과 같은 방향을 가지는 표준단위벡터는?

### 3. 벡터의 내적

**내적의 정의.**  $n$  공간의 두 벡터  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 과  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 의 내적 (*inner product*)는 다음과 같이 정의된다:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

특히  $\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 가 성립한다.

**내적의 직관적인 설명.** 물리학에서 (2,3차원 공간의) 사잇각이  $\theta \in [0, \pi]$ 인 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 의 내적은

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$$

으로 정의된 것을 기억할 것이다. 예를 들어, 힘 벡터가  $\mathbf{F}$ , 변위벡터가  $\mathbf{s}$ 인 경우 힘이 한 일은  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ 로 주어진다. 이러한 물리학적 의미와 우리의 수학적 정의를 화해시켜 보자.

$n$  공간에 평행이 아닌 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 가 주어졌다고 하자. 이러한 두 벡터에 의해 정의되는 평면은

$$\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} : s, t \in \mathbb{R}\}$$

로 정의된다. 우리는 다음 사실을 직관적으로 증명 없이 받아들일 것인데, 이 사실은 본 강의록에 나오는 증명들에 사용되지는 않는다.

**명제 5.3.1.**  $n$  공간에 평행하지 않은 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여 어떤 전단사 사상  $f : \Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 이 존재하여 임의의  $x, y \in \Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 에 대하여  $|x - y| = |f(x) - f(y)|$ 가 성립한다.

따라서 평행이 아닌 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 가 주어지면 위의 명제에 의해 세 점  $O = \mathbf{0}, A = \mathbf{a}, B = \mathbf{b}$ 를  $\mathbb{R}^2$ 의 세 점  $O' = f(\mathbf{0}), A' = f(\mathbf{a}), B' = f(\mathbf{b})$ 로 보낼 수 있다. 삼각형  $O'A'B'$ 는

$$O'A' = |f(A) - f(O)| = |\mathbf{a}|, O'B' = |f(B) - f(O)| = |\mathbf{b}|,$$

$$A'B' = |f(B) - f(A)| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|,$$

를 만족하고, 자연스럽게 우리는 유클리드 평면 위의 삼각형  $O'A'B'$ 이 바로  $n$ 차원 공간에 있는 “삼각형”  $OAB$ 와 합동이라고 생각할 수 있다. 특히 우리는  $\theta = \angle A'O'B'$ 를  $\angle AOB$ , 즉  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 사잇각으로 정의한다. 또한  $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$  혹은  $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ 가 성립하는 경우  $t \geq 0$ 이면  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$  사잇각은 0이고,  $t < 0$ 이면  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$  사잇각은  $\pi$ 로 정의한다. 그러면, 물리학에서와 마찬가지로 다음을 얻는다.

정리 5.3.2 (정리 3.1.5).  $\mathbb{R}^n$ 의 두 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$  사이의 사잇각을  $\theta \in [0, \pi]$ 라 하면 다음이 성립한다:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta.$$

PROOF. 정리 위에 정의된  $A, B, O', A', B'$ 에 대하여 유클리드 평면  $\mathbb{R}^2$ 에 속하는 삼각형  $O'A'B'$ 에 코사인 법칙  $O'A'^2 + O'B'^2 - 2O'A' \cdot O'B' \cos \theta = A'B'^2$ 을 적용하면

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$$

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta. \quad \square$$

이제 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 의 (사이)각을 얘기할 때에는 증명 없이 명제 5.3.1를 사용하여 정의했다고 생각해도 좋고, 혹은 더욱 엄밀하게,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

를 만족하는  $[0, \pi]$ 의 수  $\theta$ 라고 정의한 것으로 간주해도 된다.

따름정리 5.3.3 (정리 3.1.5).  $\mathbb{R}^n$ 의 영이 아닌 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 이루는 사잇각을  $\theta \in [0, \pi]$ 라 하자.

(1)  $\theta < \pi/2$ , 즉 사잇각이 예각일 필요충분조건은  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ 이다.

(2)  $\theta > \pi/2$ , 즉 사잇각이 둔각일 필요충분조건은  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ 이다.

(3)  $\theta = \pi/2$ , 즉 사잇각이 직각일 필요충분조건은  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 이다.

증명은 정리 5.3.2에서 자명하다.

코시-슈바르츠 부등식. 다음의 부등식은 내적에 관하여 가장 중요한 부등식 중의 하나이다. 이 부등식은 정리 5.3.2에 의해 자명하다고 볼 수도 있지만, 우리는 명제 5.3.1를 증명하지 않았으므로 여기서는 이 부등식을 정리 5.3.2를 이용하지 않고 대수적으로 증명하고자 한다.

**정리 3.4 (코시-슈바르츠 부등식, 정리 3.1.9)**

$n$  공간의 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여 다음이 성립한다:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

단, 등호는  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 일 때 성립한다.

PROOF. 두 벡터 모두 영벡터가 아니라 가정해도 좋다. 일변수 이차함수

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (ta_i - b_i)^2 = \left( \sum_i a_i^2 \right) t^2 - 2 \left( \sum_i a_i b_i \right) t + \left( \sum_i b_i^2 \right)$$

은 항상 0 이상이다. 여기서  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  이므로  $f$ 는 일차함수가 아니다. 따라서 판별식  $D$ 에 대하여

$$D/4 = \left( \sum_i a_i b_i \right)^2 - \left( \sum_i a_i^2 \right) \left( \sum_i b_i^2 \right) \leq 0$$

가 성립하여 주어진 부등식을 얻게 된다. 또한 등호는  $D = 0$ 인 경우, 즉  $f(t) = 0$ 이 유일한 해를 가질 때이며 이는  $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ 가 성립하는  $t$ 가 존재할 때이다.  $\square$

**따름정리 5.3.5 (삼각부등식)**.  $n$  공간의 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여 다음이 성립한다:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

단, 등호는  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 일 때 성립한다.

PROOF.

$$(\text{RHS})^2 - (\text{LHS})^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \geq 0. \square$$

**정의 5.3.6 (정사영).**  $n$ -공간의 벡터  $a, b$ 가 주어졌을 때  $|b - ta|$ 를 최소로 하는  $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $ta$ 를  $b$ 의  $a$ 로의 정사영이라고 부르고  $p_a(b)$ 로 표기한다.

**정리 3.7 (정리 3.1.1)**

영벡터가 아닌 벡터  $\mathbf{a}$ 에 대하여  $\mathbf{b}$ 의 정사영은

$$p_a(b) = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} a$$

로 정의된다.

PROOF.  $f(t) = |b - ta|^2 = |b|^2 t^2 - 2a \cdot bt + |a|^2$ 의 최소값은  $t = (a \cdot b)/(a \cdot a)$ 일 때 일어난다. 따라서

$$p_a(b) = ta = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} a.$$

□

우리는  $\frac{a \cdot b}{a \cdot a}$ 를  $b$ 의  $a$  성분이라 부른다.

**예제 5.3.8.**  $p_j(3, 4, 5) = 4 = p_{2j}(3, 4, 5)$ 이다.

**숙제.** p.192, 2, p.199, 2., p.201, 5, 13.

#### 4. 직선과 평면의 방정식

**평면과 초평면.**  $\mathbb{R}^3$ 의 점  $a$ 를 지나고 벡터  $n$ 에 수직인 평면  $\Pi$ 의 방정식은  $(x - a) \cdot n = 0$ 로 주어진다. 이 경우  $n$ 은  $\Pi$ 의 법선벡터라고 부른다.

**예제 5.4.1.** 방정식  $x + 2y + 3z = 1$ 을 만족하는  $(x, y, z)$ 의 집합  $\Pi$ 를 생각하여 보자. 주어진 식은  $(x - 1) + 2(y - 0) + 3(z - 0) = 0$ 로 쓸 수 있으므로  $\Pi$ 는  $(1, 0, 0)$ 을 지나고  $(1, 2, 3)$ 과 수직인 평면이다.

보다 일반적으로,  $n$  공간의 두 벡터  $r, n$ 에 대하여 방정식  $(x - r) \cdot n = 0$ 을 만족하는 모든 점  $x \in \mathbb{R}^n$ 의 집합을 초평면이라 부르고 이 경우  $n$ 을 이 초평면의 법선벡터라고 부른다.

**예제 5.4.2.**  $x + 3y + 5z + 7w = 0$ 을 만족하는  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ 의 집합은  $(0, 0, 0, 0)$ 을 지나고 법선벡터가  $(1, 3, 5, 7)$ 인 초평면이다.



직선.  $\mathbb{R}^n$ 의 한 점  $P$ 를 지나고 벡터  $v$ 에 평행한 직선이란 실수  $t$ 에 대하여  $x = P + tv$ 를 만족하는  $x$ 들의 집합을 말한다. 만일  $n = 2$  혹은  $n = 3$ 이라면 우리가 잘 알고 있는 직선의 방정식과 일치한다.

**예제 5.4.3.** 점  $A(1, 2, 3, 4)$ 과  $B(0, 2, 4, 6)$ 에 대하여 직선  $AB$ 의 방정식은

$$x = A + t\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3, 4) + (0, 2t, 4t, 6t), \quad t \in \mathbb{R}$$

이다.

중심.  $\mathbb{R}^n$ 에 있는  $N$ 개의 점  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 의 기하학적 중심 (*centroid*)은

$$x_{\text{centroid}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

으로 정의된다. 물리적으로, 중심은 같은 질량을 가지는  $N$ 개의 입자가  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 에 있을 때 무게중심과 같다.

이제 만일 질량  $m_1, m_2, \dots, m_N$ 을 갖는 입자가 각각  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 에 있다면 그 질량중심 (*center of mass*)은

$$x_{\text{center of mass}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_Nx_N}{N}$$

으로 정의된다.

양의 실수  $a, b$ 와  $\mathbb{R}^n$ 의 두 점  $P, Q$ 에 대하여,  $P$ 와  $Q$ 를  $a : b$ 로 내분하는 점은

$$R = \frac{aP + bQ}{a + b}$$

로 정의된다. 이는  $P$ 에 질량  $a$ ,  $Q$ 에 질량  $b$ 의 입자가 있을 때 질량중심과 일치한다.

**예제 5.4.4** (기본연습문제 4.4.3).  $n$ -공간의 점  $Q$ 와  $R$ 에 각각 질량  $a$ 와  $b$ 인 입자가 있다고 하자. 이제 또다른 점  $P$ 에 있는 입자의 질량  $t$ 가  $(-\infty, \infty)$  영역에서 점점 증가한다고 하면  $P, Q, R$ 에 있는 세 입자의 질량중심은  $x(t) = (tP + aQ + bR)/(t + a + b)$ 로 주어진다. 이를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{tP + aQ + bR}{t + a + b} = \frac{(t + a + b)P + a(Q - P) + b(R - P)}{t + a + b} \\ &= P + \frac{a(Q - P) + b(R - P)}{t + a + b} \end{aligned}$$

이고 이는  $P$ 를 지나고  $v = a(Q - P) + b(R - P)$ 와 평행한 직선이 된다.

속제. p.205, 1, p.211, 4, 10, 15, 20.

### 5. 일차독립과 종속

정의 5.5.1.  $n$  공간에 있는 벡터들의 집합  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 가 주어졌다고 하자.

- (1) 실수  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_ka_k$  꼴로 쓰여지는 벡터를 벡터  $a_1, a_2, \dots, a_k$ 의 일차결합이라고 부른다.
- (2)  $\mathcal{A}$ 가 일차종속이라 함은  $\mathcal{A}$ 의 한 벡터를 나머지 벡터들의 일차결합으로 쓸 수 있다는 것이다.
- (3)  $\mathcal{A}$ 가 일차종속이 아니면 일차독립이라고 부른다.

예제 5.5.2. (1)  $(3, 4, 5) = 3i + 4j + 5k$ 이므로  $(3, 4, 5)$ 는  $i, j, k$ 의 일차결합이다. 일반적으로  $\mathbb{R}^n$ 의 임의의 벡터는  $\mathbb{R}^n$ 의 표준단위벡터  $e_1, e_2, \dots, e_n$ 의 일차결합이다.

- (2)  $A = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$ 에 대하여  $(3, 5) = -(1, 1) + 2(2, 3)$ 이므로  $A$ 는 일차종속이다.

#### 정리 5.3 (정리 5.0.3)

$n$  공간에 있는 벡터들의 집합  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 이 일차독립일 필요충분조건은 방정식

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ka_k = 0$$

이 자명한 해(즉,  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ )만을 가진다는 것이다.

PROOF. 만일  $\mathcal{A}$ 가 일차종속이라면 방정식

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ka_k = 0$$

는  $x_1, x_2, \dots, x_k$  중 하나의 값이 1인 해를 갖는다.

역으로

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ka_k = 0$$

이 모두 0은 아닌 해  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 를 가진다면, 일반성을 잃지 않고  $x_k \neq 0$ 을 가정할 수 있고 이 때

$$a_k = -\frac{1}{x_k}(x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_{k-1}a_{k-1})$$

이 되어  $\mathcal{A}$ 은 일차종속이 된다.  $\square$

**예제 5.5.4.** 만일  $(a, b, c) = ai + bj + ck = 0$ 이라면  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ 이므로  $\{i, j, k\}$ 는 일차독립이다.

숙제. p.218, 6.

## 6. 부록: 좌표공간의 기저와 차원

목표. 생성, 기저, 기저 정리.

**6.1. 생성집합.**  $\mathbb{R}^3$ 의 임의의 벡터는  $i, j, k$ 의 일차결합으로 표현가능하다:

$$(x, y, z) = xi + yj + zk.$$

일반적으로 벡터  $a_1, \dots, a_k$ 가  $n$  공간을 생성한다함은  $n$  공간의 임의의 벡터  $v$ 에 대해  $v = \sum_i \lambda_i a_i$ 를 만족하는 실수의 순서쌍  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ 가 존재한다는 뜻이다.

**정의 5.6.1.**  $n$  공간의 기저란 일차독립이면서  $n$  공간을 생성하는 벡터들의 모임을 말한다.

- 예제 5.6.2.**
- (1)  $\{i, j, k\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 기저이다.
  - (2)  $\{i, j, i+k\}$  역시  $\mathbb{R}^3$ 의 기저이다.
  - (3)  $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ 는  $\mathbb{R}^2$ 의 기저가 아니다.

**정리 5.6.3 (정리 6.4.1).**  $n$  공간의 일차독립인 벡터  $a_1, \dots, a_n$ 은 기저를 이룬다.

**PROOF.**  $n$ 에 대한 귀납법.  $a_n$ 의  $n$  번째 좌표가 0이 아니라 가정하고,  $b_i = a_i - x_i a_n$ 이  $n$  번째 좌표가 0인 벡터로 잡으면  $b_1, \dots, b_{n-1}$ 도 일차 독립이고  $n-1$  공간에 있으니 기저이다. 이제  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ 을  $b_1, \dots, b_{n-1}$ 의 일차결합으로 쓰고 나면  $e_n$ 도  $b_1, \dots, b_{n-1}, a_n$ 의 일차결합으로 쓸 수 있다. 이는  $a_1, \dots, a_n$ 이  $\mathbb{R}^n$ 을 생성함을 의미한다.  $\square$

<2015-04-29 강의>

**따름정리 5.6.4 (따름정리 6.4.2).** (1)  $n$  공간의 일차독립인 벡터  $a_1, \dots, a_k$ 가 있으면  $k \leq n$ 이다.

(2)  $n$  공간을 생성하는 벡터  $a_1, \dots, a_k$ 가 있으면  $k \geq n$ 이다.

(3)  $n$  공간의 기저  $a_1, \dots, a_k$ 가 있으면  $k = n$ 이다.

PROOF. (1), (3) 자명

(2)  $A$ 는  $a_i$ 들을 세로로 써서 붙여놓은  $n \times k$  행렬이라 하자. 생성조건에 의해, 각  $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대해 어떤 열벡터  $b_i \in \mathbb{R}^k$ 가 존재하여 각 표준단위벡터  $e_i \in \mathbb{R}^n$ 를  $Ab_i = e_i$ 로 쓸 수 있다. 따라서  $AB = I_n$ 을 만족하는  $k \times n$  행렬  $B$ 가 있다. 한편 만일  $k < n$ 이라면 (1)에 의해  $A$ 의 행벡터들은 일차종속이므로  $yA = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ 인  $1 \times n$  행렬  $y \neq \mathbf{0}$ 가 있다. 이 때,  $\mathbf{0} = \mathbf{0}B = yAB = yI_n = y$ 이어서 모순을 얻는다.  $\square$

## 6.2. 벡터공간의 차원, 기저와 좌표계: 생략.

속제. p.225, 1.



## CHAPTER 6

# 행렬과 선형사상

### 1. 행렬

**1.1. 정의.** 자연수  $m, n$ 에 대하여  $m \times n$  행렬이란  $mn$ 개의 수를  $m$ 개의 행,  $n$ 개의 열을 가지도록 아래처럼 나열한 것이다:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

이 때 우리는  $i$  번째 행,  $j$  번째 열,  $(i, j)$  항 (혹은  $(i, j)$ -원소)을 자연스럽게 정의할 수 있다.

**예제 6.1.1.**  $2 \times 2$  행렬  $A = (i^2(i + j))$ .

**예제 6.1.2.** 모든 항이 0인 행렬을 영행렬이라고 부른다.

**연산.** 크기가 같은 두 행렬  $A = (a_{ij})$ 와  $B = (b_{ij})$ 의 합은  $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$ 로 정의한다. 실수  $c \in \mathbb{R}$ 에 대하여 상수곱은  $cA = (ca_{ij})$ 로 정의한다.

행렬을 수학에서 이용하기 시작한 가장 중요한 동기는 선형방정식이다. 즉 방정식

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

을  $m \times n$  행렬  $A = (a_{ij})$ 와 두 열벡터  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ 을 이용하여 표현하고자 함이다.

보다 구체적으로,  $m \times n$  행렬  $A = (a_{ij})$ 와  $n \times \ell$  행렬  $B = (b_{jk})$ 에 대하여  $AB$ 는  $m \times \ell$  행렬로서 그  $(i, j)$  항이  $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{jk}$ 로 주어졌다고 하면 위의 선형 연립방정식은  $Ax = b$ 로 쓸 수 있다.

**보조정리 6.1.3** (기본연습문제 1.2.2). 세 개의 행렬  $A, B, C$ 가 주어져 있어서  $A$ 의 열의 갯수는  $B$ 의 행의 갯수와 같고,  $B$ 의 열의 갯수는  $C$ 의 행의 갯수와 같다면  $(AB)C = A(BC)$ 가 성립한다.

PROOF. 행렬  $A = (a_{ij})$  등으로 쓰면

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{pq} &= \sum_i (AB)_{pi} c_{iq} = \sum_i \left( \sum_j a_{pj} b_{ji} \right) c_{iq} \\ &= \sum_j a_{pj} \left( \sum_i b_{ji} c_{iq} \right) \\ &= \sum_j a_{pj} (BC)_{jq} = (A(BC))_{pq}. \quad \square \end{aligned}$$

따라서, 만일 연립방정식  $Ax = b$ 가 주어져 있고 또한 관계식  $x = By$ 가 성립한다면  $b = A(By) = (AB)y$ 가 성립한다.

**참고.** Einstein notation을 이용하면 위의 증명은 다음과 같다:

$$((AB)C)_{pq} = (AB)_{pi} c_{iq} = A_{pj} B_{ji} c_{iq} = A_{pi} (BC)_{jq} = (A(BC))_{pq}.$$

**전치행렬.** 행렬  $A = (a_{ij})$ 가  $m \times n$  행렬이라면, 우리는  $A$ 의 전치행렬을  $A^t = (a_{ji})$ 를 만족하는  $n \times m$  행렬로 정의한다.

**예제 6.1.4.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

**예제 6.1.5.** 내적  $x \cdot y$ 는 두 행렬의 곱  $y^t x$ 으로 쓸 수 있다. 따라서  $x \cdot Ay = y^t A^t x = A^t x \cdot y$ 가 성립한다.

**속제.** 2, 5, 7.

**정사각행렬.** 자연수  $n$ 에 대하여  $n \times n$  행렬을 정사각행렬이라고 부른다. 특히  $I_n = (\delta_{ij})$ 는 항등행렬이라고 부른다.

## 2. 선형사상

$m \times n$  행렬  $A$ 가 주어져 있다고 하자. 우리는 함수 (변환이라고도 불린다)  $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 을  $L_A(x) = Ax$ 로 정의할 수 있다.

예제 6.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

인 경우  $L_A(x, y) = (2x + 3y, 4x + 6y, 7x + 10y)$ 이다.

이제  $m \times n$  행렬  $A$ 에 대하여

$$L_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = L_A(x) + L_A(y)$$

이고  $c \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $L_A(cx) = A(cx) = cAx = cL_A(x)$ 임을 알 수 있다.

정의 6.2.2. 변환  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 이 임의의  $x, y \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$T(x + y) = Tx + Ty, T(cx) = cT(x)$$

를 만족한다면 우리는  $T$ 를 선형변환이라고 부른다.

명제 6.2.3. 임의의 선형사상  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 에 대하여 어떤  $m \times n$  행렬  $A$ 가 존재하여  $T = L_A$ 가 성립한다.

PROOF.  $e_1, e_2, \dots, e_n$ 이  $\mathbb{R}^n$ 의 표준단위벡터라 하고  $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여  $a_i = Te_i \in \mathbb{R}^m$ 이라 정의하자. 이제  $a_i$ 각 각 열에 해당하는  $m \times n$  행렬  $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ 을 정의하면 임의의 열벡터  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 에 대하여

$$T(x) = T\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i T(e_i) = \sum_i x_i a_i = Ax = L_A(x). \quad \square$$

예제 6.2.4.

$$T: (a, b, c) \mapsto (c, b, a)$$

예제 6.2.5.  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ 이 단위벡터일 때 정사영  $Tx = p_v(x)$ 로 정의된 변환  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 을 생각하자.

$$Tx = \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v = (x \cdot v)v$$



에서  $T$ 는 선형임을 알 수 있다. 이에 해당하는 행렬을 계산하여 보자.

$$(Tx)_i = (x \cdot v)v_i = \sum_j (v_i v_j)x_j$$

이고 따라서  $n \times n$  행렬  $A = (v_i v_j) = v^t v$ 를 고려하면  $Tx = Ax$ 가 성립한다.

예를 들어,  $v = (1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$p_v(x) = \begin{pmatrix} 1/14 & 2/14 & 3/14 \\ 2/14 & 4/14 & 6/14 \\ 3/14 & 6/14 & 9/14 \end{pmatrix} x.$$

숙제. 3, 7.

### 3. 부록: 등장변환과 행렬의 극한

목표. 회전, 등장변환의 선형성, 직교행렬, 대각합, 행렬의 급수

3.1. 등장변환.  $\mathbb{R}^2$ 에서 양의 방향으로  $\theta$  만큼 회전시키는 변환은

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

이며, 따라서  $\mathbb{R}^3$ 에서  $z$  축으로 중심으로 위에서 바라보았을 때 (즉 양의  $z$  축을 중심으로)  $\theta$  만큼 회전시키는 변환은

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ 에서 양의  $x$  축,  $y$  축을 중심으로  $\theta$  만큼 회전시키는 변환은

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

정의 6.3.1 (등장변환). 함수  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 임의의  $P, Q \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$$

을 만족하면  $f$ 는  $\mathbb{R}^n$ 에 정의된 등장변환이라 부른다.

먼저 우리는 원점을 보존하는 등장변환을 분류해 보자.

**보조정리 6.3.2.** 원점을 보존하는 등장변환은 벡터의 크기와 내적을 보존한다.

PROOF.  $T$ 가 원점을 보존하는 등장변환이라고 하자. 임의의 점  $X$ 에 대해  $|X| = d(0, X) = d(T0, TX) = |TX|$ 이고 따라서 임의의  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} 2TX \cdot TY &= (TX - TY) \cdot (TX - TY) - TX \cdot TX - TY \cdot TY \\ &= |TX - TY|^2 - |TX|^2 - |TY|^2 = |X - Y|^2 - |X|^2 - |Y|^2 \\ &= 2X \cdot Y. \end{aligned}$$

□

**정리 6.3.3.** 원점을 보존하는 등장변환은 선형이다.

PROOF.  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 원점을 보존하는 등장변환이라 하자.  $c \in \mathbb{R}$ 이고  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 일 때 보조정리 6.3.2에 의해,

$$\begin{aligned} &|T(X + cY) - TX - cTY|^2 \\ &= |T(X + cY)|^2 + |TX + cTY|^2 - 2T(X + cY) \cdot (TX + cTY) \\ &= |X + cY|^2 + |TX|^2 + c^2|TY|^2 + 2cTX \cdot TY \\ &\quad - 2T(X + cY) \cdot TX - 2cT(X + cY) \cdot TY \\ &= |X + cY|^2 + |X|^2 + c^2|Y|^2 + 2cX \cdot Y \\ &\quad - 2(X + cY) \cdot X - 2c(X + cY) \cdot Y = 0. \end{aligned}$$

즉  $T(X + cY) = TX + cTY$ 가 증명되었다. □

**정의 6.3.4 (직교행렬).**  $n$  차 정사각 행렬  $A$ 가  $A^t A = I_n$ 를 만족하면  $A$ 를 직교행렬이라 부른다.

직교행렬  $A$ 의 열벡터들을  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 이라 쓰면

$$v_i \cdot v_j = (A^t A)_{ij} = \delta_{ij}$$

가 성립하며, 특히 서로 다른 두 열은 서로 직교한다.

**보조정리 6.3.5.**  $n$  공간에 두 벡터  $X, Y$ 가 주어져 있을 때에, 만일 임의의  $n$  공간의 벡터  $Z$ 에 대해  $X \cdot Z = Y \cdot Z$ 가 성립한다면  $X = Y$ 이다.

PROOF.  $Z = X - Y$ 를 대입하면  $|X - Y|^2 = (X - Y) \cdot (X - Y) = X \cdot (X - Y) - Y \cdot (X - Y) = 0$ 을 얻는다.  $\square$

정리 6.3.6.  $n$  차 정사각 행렬  $A$ 가 정의하는 선형변환  $L_A$ 가 등장변환일 필요충분조건은  $A$ 가 직교행렬이라는 것이다.

PROOF.  $L_A$ 가 등장변환이라고 가정하자. 임의의  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$X \cdot Y = AX \cdot AY = (AY)^t AX = Y^t A^t AX = A^t AX \cdot Y$$

이므로 보조정리 6.3.5에 의하여  $X = A^t AX$ 가 된다. 이 등식은 임의의  $X$ 에 대해 성립하므로

$$A^t A = A^t A I_n = A^t A(e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n) = (A^t A e_1 \ A^t A e_2 \ \cdots \ A^t A e_n) = I_n.$$

역으로,  $A^t A = I$ 이면  $AX \cdot AY = A^t AX \cdot Y = X \cdot Y$ 이고  $X = Y$ 를 대입하여  $|AX| = |X|$ 를 얻어서  $L_A$ 가 길이(크기)를 보존함을 알 수 있다.  $\square$

직교행렬이 정의하는 선형사상을 우리는 직교변환이라고 부른다. 우리는  $n$ -공간의 벡터를  $v$ 만큼 움직이는 평행사상을  $T_v$ 로 표기하였다(정의 5.1.1).

따름정리 6.3.7. 임의의 등장변환은 직교변환과 평행이동의 합성으로 표현된다.

PROOF.  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 임의의 등장변환이라 하고  $T(0) = v$ 로 쓰자. 그러면  $S(x) = T(x) - v$ 는 0을 0으로 보내는 등장변환이어서 직교변환이고(정리 6.3.6),  $T = T_v \circ S$ 로 쓸 수 있다.  $\square$

### 3.2. 정사각행렬과 다항식.

정의 6.3.8 (대각합 (trace)).  $n$  차 정사각행렬  $A = (a_{ij})$ 에 대하여 그 대각합은  $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$ 로 정의된다.

명제 6.3.9.  $A, B$ 가  $n$  차 정사각행렬이고  $c \in \mathbb{R}$ 이면

$$(1) \text{tr}(A + cB) = \text{tr} A + c \text{tr} B.$$

$$(2) \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

$$(3) \text{tr}(A^t) = \text{tr}(A).$$

PROOF. (2)  $\text{tr}(AB) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = \text{tr}(BA)$ .  $\square$

다항식  $p(x) = \sum_i a_i x^i$ 에 대하여

$$p(A) = \sum_i a_i A^i$$

로 정의한다.

**예제 6.3.10.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

에 대하여  $p_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$ 로 두면  $p_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O$ 이 성립한다. 특히  $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$ 이고

$$\begin{aligned} A^3 &= (a+d)A^2 - (ad-bc)A = (a+d)((a+d)A - (ad-bc)I) - (ad-bc)A \\ &= (a^2 + d^2 + ad + bc)A - (a+d)(ad-bc)I \end{aligned}$$

등으로 쓸 수 있다.

**3.3. 행렬의 극한.** 행렬  $A = (a_{ij})$ 에 대하여 그 절대값의 정의는:

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^t A)} = \sqrt{\text{tr}(A A^t)}.$$

**예제 6.3.11.**

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + 49 + \dots}$$

실제로  $|A|^2 = \text{tr}(A^t A)$ 이다.

**정리 6.3.2.** 두 행렬  $A, B$  사이에  $AB$ 가 잘 정의되면,

$$|AB| \leq |A| \cdot |B|$$

이 성립한다. 특히  $A$ 가 정사각행렬이면  $|A^k| \leq |A|^k$ 이다.

PROOF. 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$|AB|^2 = \sum_{i,k} \left( \sum_j a_{ij} b_{jk} \right)^2 \leq \sum_{i,k} \left( \sum_j a_{ij}^2 \right) \left( \sum_j b_{jk}^2 \right) = |A|^2 |B|^2. \quad \square$$

이제 각 항이 행렬인 수열  $\{A(n)\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = B$ 라 함은  $A(n)$ 의 각  $ij$  원소가  $B$ 의  $ij$  원소에 수렴한다는 것이다.

정리 6.3.3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = B$  일 필요충분조건은  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A(n) - B| = 0$  이다.

증명은 직관적인 이해로 대체한다.

예제 6.3.4.

$$A = \begin{pmatrix} .1 & .2 & .3 \\ .2 & -.1 & .3 \\ .5 & .1 & .2 \end{pmatrix}$$

이면  $|A| < 1$  을 쉽게 확인할 수 있다. 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A^n| \leq \lim_n |A|^n = 0$  이고,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = O$  이다.

3.4. 행렬의 급수.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

에 대하여

$$\sum_{n \geq 0} A^n = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

이다.

### 정리 3.5

임의의 정사각행렬  $A$ 에 대하여 급수

$$e^A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}A^n$$

는 항상 수렴한다.

PROOF. 행렬  $X$ 의 각  $ij$  원소의 절대값은  $|X|$  이하이다. 이제

$$\left| \left( \frac{A^n}{n!} \right)_{ij} \right| \leq \frac{|A^n|}{n!} \leq \frac{|A|^n}{n!}$$

이고  $\sum_n |A|^n/n! = e^{|A|}$  이므로  $e^A$ 의 각  $(i, j)$  항은 비교판정법에 의해 절대수렴한다.  $\square$

일반적으로,

$$S_N = \sum_{n=0}^N A^n$$

라 두면  $(I - A)S_N = S_N - AS_N = I - A^{N+1}$  이고, 만일  $B(I - A) = I$ 가 성립하는  $B$ 가 존재한다면  $B = (I - A)^{-1}$ 로 썼을 때  $S_N = (I - A)^{-1}(I - A^{N+1})$ 이 성립한다. 특히,  $|A| < 1$ 이라면

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}.$$

속제. p.252, 3.4.3, p.254, 10, 12.



## CHAPTER 7

### 정사각행렬과 행렬식

#### 1. 역행렬

어떤 정사각행렬  $A$ 에 대하여  $AB = BA = I$ 인 정사각행렬  $B$ 가 존재한다면  $B$ 를  $A$ 의 역행렬이라 부르고  $B = A^{-1}$ 로 쓴다. 만일  $A$ 의 역행렬이 존재한다면 연립방정식  $Ax = b$ 는

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

로 쉽게 행렬의 곱으로 구할 수 있다.

**명제 7.1.1.** 만일 정사각 행렬  $A$ 에 대하여  $BA = I = AC$ 인 정사각행렬  $B, C$ 가 존재한다면  $B = C$ 이다.

PROOF.

$$B = BI = BAC = IC = C. \quad \square$$

정리 7.4.3에서 우리는  $BA = I$ 인 정사각행렬  $B$ 가 존재한다면  $AB = I$ 임을 증명한다.

숙제. 2

#### 2. 치환

**목표.** 치환의 개수, 곱과 역치환, 치환의 부호, 호환, 전도의 수, 부호.

**정의 7.2.1.** 주어진  $n$ 에 대하여 치환이란  $\{1, 2, \dots, n\}$ 에 정의된 전단사함수를 말한다.

$\{1, 2, \dots, n\}$ 에서 정의된 치환의 집합은  $S_n$ 으로 쓴다.

두 치환의 합성을 우리는 치환의 곱이라 줄여 부르고, 역치환은 치환의 역함수를 일컫는다. 또한 어떤  $i, j$ 에 대하여  $i$ 와  $j$ 를 바꾸고 다른 수를 고정하는 치환을 호환이라 부르며  $(ij)$ 로 표기한다. 별다른 혼동이 없을 경우 1은 항등치환을 의미한다.





FIGURE 1. 버블정렬.

정리 7.2.2. 임의의 치환  $\sigma$ 에 대하여  $\prod_{i=1}^k \tau_i \sigma = 1$ 이 되게 하는 호환들의 곱  $\tau_i$ 가 존재하며, 이러한  $\tau_i$ 들의 갯수  $k$ 는  $\text{mod } 2$ 로 유일하다.

이러한 호환들을 찾는 방법은 여러가지가 있는데, 그 중 대표적인 버블 정렬은 아래 동영상으로 설명한다. 증명은 각자 생각해 볼 수 있을 것이다.

버블소트 관련 동영상: <https://youtu.be/lyZQPjUT5B4>

이러한  $k$ 를 치환  $\sigma$ 의 부호라 한다.

치환  $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ 에 대하여 그 전도의 수를

$$N(\sigma) = |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

로 정의하자.

예제 7.2.3. (1)  $N(1) = 0$

(2)  $N((12)) = 1$ .

(3)  $N \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 는 둘째 줄에서 4 뒤에 나오면서 4보다 작은 수의 갯수, 3 뒤에 나오면서 3보다 작은 수의 갯수 ...을 세어  $3 + 2 + 1 = 6$ 이다.

(4)

$$N \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

정리 7.2.4 (정리 4.1.6). 임의의 치환  $\sigma$ 와 호환  $\tau$ 에 대하여  $N(\sigma\tau) \equiv N(\sigma) + 1 \pmod{2}$ 이 성립한다.

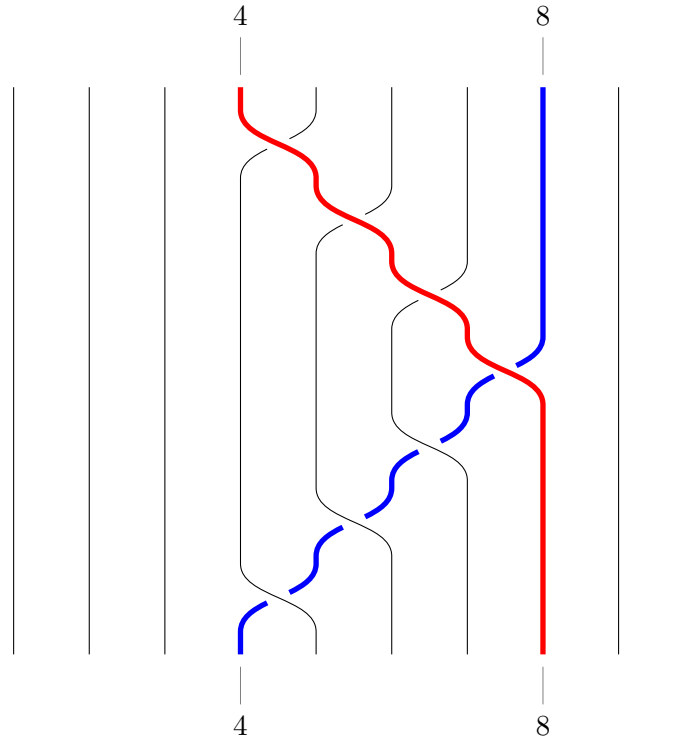


FIGURE 2. 호환  $(4, 8)$ 은 7개의 인접호환들의 곱과 같다.

PROOF. 먼저  $\tau = (k \ k + 1)$ 의 꼴이라 가정하고,  $\sigma(k) = p, \sigma(k + 1) = q$  라면

$$N(\sigma\tau) - N(\sigma) = N \begin{pmatrix} k & k + 1 \\ q & p \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} k & k + 1 \\ p & q \end{pmatrix} = \pm 1.$$

이제 임의의 호환  $\tau = (i \ j)$ 는

$$(i \ j) = (i \ i + 1) \cdots (j - 3 \ j - 2)(j - 2 \ j - 1)(j - 1 \ j)(j - 2 \ j - 1) \cdots (i \ i + 1)$$

은  $2|i - j| - 1$ , 즉 홀수개 인접호환의 곱임을 이용하면 (그림 2) 증명이 끝난다.  $\square$

정리 7.2.5 (정리 4.1.8). 어떤 호환  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_m$  이

$$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k = \tau'_1 \tau'_2 \cdots \tau'_m$$

를 만족하면  $k \equiv m \pmod{2}$ 이다.

PROOF.

$$\tau_k \tau_{k-1} \cdots \tau_1 \tau'_1 \tau'_2 \cdots \tau'_m = \text{Id}$$

이므로 정리 4.1.6에 의해  $k + m \equiv 0 \pmod{2}$ 이다. □

위의 정리로 부터

정의 7.2.6.  $k$  개의 호환으로 쓰여질 수 있는 치환  $\sigma$ 의 부호는

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

로 정의한다.  $\text{sgn} = 1$ 인 치환을 짝치환,  $-1$ 인 치환을 홀치환이라고 한다.

참고.  $S_n$ 에서 짝치환의 개수와 홀치환의 개수는 같다. 만일  $A_n$ 이 짝치환의 집합이라면,  $A_n$ 과  $A_n(12) = \{\sigma(12) : \sigma \in A_n\}$ 은 서로 소이고 그 합집합이  $S_n$ 이다.

### 3. 행렬식

목표. 행렬식의 정의와 성질, 라플라스 전개, 행렬식의 곱

예: 2차 행렬의 행렬식.

정의 7.3.1. 일반적으로  $A = (a_{ij})$ 로 주어진 행렬의 행렬식은 다음과 같이 주어진다:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

예제 7.3.2 (라플라스 전개).

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}. \\ &\quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -3. \end{aligned}$$

보조정리 7.3.3 (기본연습문제 3.0.2).  $\det(A^t) = \det(A)$ .

PROOF.  $b_{ij} = a_{ji}$  로 두면  $B = (b_{ij}) = A^t$  이다.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma^{-1}(1)1} b_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots b_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det(A). \end{aligned}$$

□

정리 7.3.4 (정리 3.0.3 A). 행렬식  $\det : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$  은 다음 성질을 만족한다.

(1) (다중선형성) 각 열에 대해 선형이다. 즉,

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i + t\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) + t \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}'_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

(2) (왜대칭성) 두 열을 바꾸면 부호가 바뀐다.

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

PROOF. (1)  $b = a_i + a'_i$  이라 두면

$$\begin{aligned} &\det(a_1, a_2, \dots, b, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + a'_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

에서 자명.

(2)  $i < j$ ,  $\tau = (i j)$  라 하고

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{if } k \neq i, j \\ a_j & \text{if } k = i \\ a_i & \text{if } k = j \end{cases}$$

로 두자.  $B = (b_{ij})$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} a_{2\sigma\tau^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)} = \det(A). \end{aligned}$$

□

### 정리 3.5 (정리 3.0.3 A)

함수  $f : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ 가 다중선형성과 왜대칭성을 가지면  $f(A) = f(I) \det(A)$ 가 성립한다.

다시말해, 함수  $f : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ 가

- (1) 각 열에 대해 선형이고,
- (2) 두 열을 바꾸면 부호가 바뀐다면

$f(A) = f(I) \det(A)$ 가 성립한다.

PROOF.  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 으로 두자.

$$\begin{aligned} f(a_{ij}) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in [n]^n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \operatorname{sign}(\sigma) f(I) \\ &= \det(A^t) f(I) = f(I) \det(A). \end{aligned}$$

□

따름정리 7.3.6 (따름정리 3.0.4). (1) 서로 다른 두 열이 같은 벡터인 정사각행렬의 행렬식은 0이다.

- (2) 정사각행렬에서 한 열에 다른 열의 상수배를 더하더라도 행렬식의 값은 변화가 없다.

정리 7.3.7 (행렬의 곱과 행렬식).

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

PROOF.  $f(B) = f(b_1, \dots, b_n) = \det(Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n) = \det(AB)$  로 정의하자. 그러면 정리 3.0.3의 (1), (2)가 만족하므로  $f(B) = f(I) \det(B) = \det(A) \det(B)$  이 성립한다.  $\square$

예제 7.3.8.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

임을 확인하였다. 따라서  $\det G \neq 0$ 인 임의의  $3 \times 3$  행렬  $G$ 에 대하여  $\det(GAG^{-1}) = -3$ 이다. 또한  $\det(A^4) = 81$ 이다.

속제. 2, 3, 4

#### 4. 부록: 치환의 부호와 행렬식

목표. 일차독립, 가역성.

정리 7.4.1 (정리 4.2.2).  $n$ -벡터  $P = \{a_1, \dots, a_n\}$ 이 1차독립일 필요충분 조건은  $\det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ 이다.

PROOF.  $A = (a_{ij})$ 라 하자. 만일  $P$ 가 1차 독립이라면 이는  $\mathbb{R}^n$ 이 기저이다. 이는  $Ab_1 = e_1, Ab_2 = e_2, \dots, Ab_n = e_n$ 을 만족하는  $B = (b_1, \dots, b_n)$ 이 존재함을 함의하고, 따라서  $AB = I$ 인  $B$ 가 존재한다.  $\det(A) \det(B) = \det(I) = 1$ 이므로  $\det A \neq 0$ .

역으로, 만일  $P$ 가 1차 종속이라면 이 중 어느 한 벡터는 나머지 벡터들의 일차결합으로 표현 가능하다. 일반성을 잃지 않고,  $a_1 = c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$ 으로 쓰여졌다면

$$\det(A) = \sum_{i=2}^n c_i \det(a_i, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0.$$

$\square$

예제 7.4.2.  $\mathbb{R}^3$ 에서 세 점  $P, Q, R$ 이 원점을 지나는 평면  $ax + by + cz = 0$  위에 있다고 하자. 그러면  $A = (P, Q, R)$ 에 대하여  $(a, b, c)A = (0, 0, 0)$ 을 만족한다. 이는  $A$ 의 열이 일차 종속임을 의미하여  $\det(A) = \det(A^t) = 0$ 을 함의한다. 따라서,  $\{P, Q, R\}$ 은 일차종속이다.

행렬  $A$ 가 가역이라 함은  $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ 인 행렬  $A$ 가 존재하는 것이다.

**정리 4.3 (정리 4.2.4)**

$n$ 차 정사각행렬  $A$ 가 가역일 필요충분조건은  $\det(A) \neq 0$ 이다.

PROOF.  $\det(A) \neq 0$ 이라면  $A$ 의 열벡터들은 일차독립이어서  $\mathbb{R}^n$ 의 기저를 이룬다. 이는  $Ab_1 = e_1, Ab_2 = e_2, \dots, Ab_n = e_n$ 을 만족하는  $B = (b_1, \dots, b_n)$ 이 존재함을 함의하고, 따라서  $AB = I$ 이다. 마찬가지로  $A^t C^t = I$ 인  $C$ 가 존재하므로,  $CA = I = AB$ 가 된다. 그러면  $C = CAB = (CA)B = B$ 이어서  $B = C = A^{-1}$ 가 된다.

역으로,  $A$ 가 가역이라면,  $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$ 이어서  $\det(A) \neq 0$ 이다. □

속제. 1, 6, 8

## 삼차원 공간과 벡터의 외적

## 1. 외적

외적의 정의. 삼차원 공간에 두 벡터  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 와  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 의 외적 (*cross product*)은 다음과 같이 정의된다:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

예제 8.1.1. (1)

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) = \mathbf{k}.$$

(2)

$$(1, 0, 1) \times (0, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1, -1, 1).$$

외적의 크기와 방향. 두 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 사이각  $\theta$ 는  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$ 를 만족한다.

정리 8.1.2. (1)  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 가 성립한다.

(2)  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$  사이의 사이각을  $\theta$ 라 하면  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta$ 이다.

즉  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 의 크기는 0,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}$ 가 이루는 평행사변형의 넓이다.



PROOF. (1) 정의에서 자명하다.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \\
 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2.
 \end{aligned}$$

한편  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \geq 0$ 이므로,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta. \quad \square$$

예제 8.1.3.  $\mathbb{R}^3$ 의 세 점  $A(0, 1, 0), B(1, 0, 1), C(1, 2, 3)$ 를 생각하자.

- (1)  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 를 구하시오.
- (2) 삼각형  $ABC$ 의 넓이를 구하시오.
- (3) 삼각형  $ABC$ 을 포함하는 방정식을 구하시오.

PROOF. (1)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (-2, -4, 2).$$

(2) 삼각형의 넓이는

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

로 주어진다. 따라서 구하는 답은

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}. \quad \square$$

(3)

$$(x - A) \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$$

에서  $(x - j) \cdot (-2, -4, 2) = 0$ , 즉  $-2x - 4(y - 1) + 2z = 0$ 을 얻는다.

정리 8.1.4.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 는  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 에 모두 수직하다.

PROOF. 라플라스 전개에 의해

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0. \quad \square$$

명제 8.1.5. 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 와 상수  $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여

- (1)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 이다.  
 (2)  $(t\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = t(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 이다.

1.1. 외적의 방향에 대한 직관적인 설명. 따라서  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 의 방향은  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 가 결정하는 평면  $\Pi$ 의 법선벡터의 방향과 같다. 그렇다면  $\Pi$ 와 수직한 두 벡터 중 어느 것의 방향과 같을까?

먼저  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ 이므로  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ 는 오른손 법칙에 의해 결정되는 방향임을 안다. 이제

$$X = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \parallel \mathbf{y}\}, \quad S^2 = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{a}| = 1\}$$

로 정의하고 함수  $\Phi: X \rightarrow S^2$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|}.$$

$\Phi$ 의 각 성분함수는 모두 연속이므로  $\Phi$  역시 연속함수임을 알 수 있다. 한편,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 가 모두  $xy$ -평면에 있는 경우  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ 이다. 특히  $\mathbf{y}$ 는  $\mathbf{x}$ 를 양의 방향으로  $\theta \in (0, \pi)$ 만큼 회전시켜 얻는 벡터라면,  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ 를  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 로  $xy$ -평면 위에서 연속적으로 변화시킬 수 있고 이러한 변화 중  $\Phi$ 의 값은 연속적으로 변화하여야 한다. 그런데 그 변화 중  $\Phi$ 의 값은  $\mathbf{k}$ 와  $-\mathbf{k}$  중 하나이므로, 결국 그러한 연속적인 변화 중에  $\Phi$ 의 값은  $\Phi(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \mathbf{k}$ 로 유지된다. 즉  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ 의 방향 역시 오른손 법칙에 의해 결정된다.

마지막으로 임의의  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X$ 를 생각하자. 두 벡터  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 는 서로 평행이 아니므로  $\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ 를 포함하는 평면  $\Pi$ 가 유일하게 존재한다. 이  $\Pi$ 와  $xy$ -평면의 교선을 중심축으로 연속적으로 회전시키는 변환을  $R_t$ 라 하여 (여기서  $t \in [0, \theta]$ )  $R_0 = \text{Id}, R_\theta(\{z = 0\}) = \Pi$ 라 하면  $\Phi(R_t(\mathbf{i}), R_t(\mathbf{j}))$ 는 역시  $R_t(\mathbf{i}), R_t(\mathbf{j})$ 에 대하여 오른손법칙에 의해 주어진 방향임을 알 수 있다. 마지막으로  $(R_1(\mathbf{i}), R_1(\mathbf{j}))$

를  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 로  $\Pi$  위에서 연속적으로 변화시키는 변환에 대해서  $\Phi$ 의 결과는  $\Pi$ 와 수직한 두 방향 중 하나이고, ( $\Phi$ 의 연속성에 의해) 변하지 않는다. 따라서  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 에 대하여 오른손법칙에 의해 주어진 방향이다.

결론적으로 3-차원 공간에 있는 두 벡터의 외적의 방향은 오른손법칙으로 주어진다.

숙제. 9, 14

## 2. 외적과 행렬

외적과 선형사상. 벡터  $a \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여 변환  $M_a: x \mapsto a \times x$ 는  $x$ 에 대한 선형사상이다. 따라서 이제  $M_a$ 에 대한 행렬을 구할 수 있다. 구체적으로

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

으로 주어진다. 이러한 행렬은  $-M_a^t = M_a$ 를 만족하는데, 이러한 행렬을 왜대칭행렬이라 부른다. (Why? symmetric matrix가 아니다)

### 삼중곱의 정의와 크기.

정의 8.2.1 (삼중곱). 3차원 공간의 세 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 의 삼중곱 (*triple product*)은  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 로 정의된다.

라플라스 전개에 의해서

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

처럼 계산할 수 있다.

예제 8.2.2. 세 벡터  $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ 의 삼중곱은

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

입체 (solid)

$$P = \{\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} : \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]\}$$

를  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 의해 결정된 **평행육면체** (*parallelepiped*)라고 부른다. 이제  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 와  $\mathbf{c}$  사이의 각을  $0 \leq \phi \leq \pi$ 라고 한다면  $P$ 의 부피는

$$V = A \cdot h = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\cos \phi| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

로 주어진다. 네 꼭지점  $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 으로 결정되는 사면체의 부피는  $\frac{1}{6}A \cdot h = \frac{V}{6}$ 이다.

**예제 8.2.3.** 점  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, (1, 1, 1)$ 로 결정된 사면체의 부피는

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - (1, 1, 1), \mathbf{b} = \mathbf{j} - (1, 1, 1), \mathbf{c} = \mathbf{k} - (1, 1, 1)$$

에 대하여

$$V = \frac{1}{6} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

삼중곱의 불변성.

**보조정리 8.2.4.** 3차 정방행렬  $A$ 와 3차원 벡터  $x, y, z$ 에 대하여 다음이 성립한다:

$$(Ax \times Ay) \cdot Az = \det(A)(x \times y) \cdot z.$$

PROOF.

$$\begin{aligned} (Ax \times Ay) \cdot Az &= \det(Ax, Ay, Az) = \det(A(x, y, z)) \\ &= \det(A) \det(x, y, z) \quad (\because \text{정리 7.3.7}) \\ &= \det(A)(x \times y) \cdot z. \end{aligned} \quad \square$$

### 정리 2.5

$A$ 가 3차 가역행렬이고  $x, y \in \mathbb{R}^3$ 이면 다음이 성립한다:

$$Ax \times Ay = \det(A)(A^{-1})^t(x \times y).$$

PROOF. 임의의 벡터  $z \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여  $z' = A^{-1}z$ 으로 정의하면

$$\begin{aligned}(Ax \times Ay) \cdot z &= (Ax \times Ay) \cdot Az' = \det(A)(x \times y) \cdot z' = \det(A)(x \times y) \cdot A^{-1}z \\ &= \det(A)z^t(A^{-1})^t(x \times y) = \det(A)(A^{-1})^t(x \times y) \cdot z.\end{aligned}$$

보조정리 6.3.5에 의하여  $Ax \times Ay = \det(A)(A^{-1})^t(x \times y)$ 가 성립한다.  $\square$

**예제 8.2.6.** 3차원 공간의 세 점  $A, B, C$ 에 대하여 사면체  $OABC$ 의 부피가 70이고  $\det(M) = 10$ 인 3차 정방행렬이 있으면  $O, MA, MB, MC$ 가 결정하는 사면체의 부피는 700이다.

직교행렬  $A$ 에 대해  $A^{-1} = A^t$ 이고  $\det(A) = \pm 1$ 이므로 다음이 성립한다.

**따름정리 8.2.7.**  $A$ 가 3차 직교행렬이고  $x, y \in \mathbb{R}^3$ 이면 다음이 성립한다:

$$Ax \times Ay = \pm A(x \times y).$$

**명제 8.2.8 (외적의 성질).**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 는 3차원 벡터라 하자.

- (1)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ .
- (2)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ .
- (3)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

PROOF. (2)는 행렬식으로, (3)은 격렬한 계산으로 증명할 수 있다.  $\square$

**예제 8.2.9 (탐구문제).** 구면 위의 세 점  $A, B, C$ 에 대하여  $a, b, c \in [0, \pi]$ 는 각  $BC, CA, AB$ 에 해당하는 대원호 (great arc)의 길이라 하고  $\angle BCA \in [0, \pi]$ 라 하자.

- (1) (구면의 코사인 법칙)  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \angle BCA$ 가 성립한다.
- (2) 삼각부등식이 성립한다. 즉,  $c \leq a + b$ 이며 등호가 성립할 필요충분 조건은  $\angle BCA = \pi$ 인 것이다.

PROOF. (1) 내적과 외적의 성질 및  $C \cdot C = 1$ 을 이용하면  $t = \angle BCA$ 에 대하여 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos t &= (C \cdot B)(C \cdot A) + (C \times B) \cdot (C \times A) \\ &= (C \cdot B)(C \cdot A) + ((C \times A) \times C) \cdot B \\ &= (C \cdot B)(C \cdot A) + ((C \cdot C)A - (C \cdot A)C) \cdot B \\ &= A \cdot B = \cos c. \end{aligned}$$

(2) 두 점  $B, C$ 와 길이  $a, b$ 를 고정하고, 각  $t = \angle BCA$ 를 0에서  $\pi$ 까지 늘려나가면  $c = c(t)$ 는  $t$ 의 함수가 된다. 코사인 법칙에 의하여,

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos t$$

가 성립한다. 따라서 우리는  $\cos c(t)$ 가  $t \in [0, \pi]$ 에 대한 감소함수임일 알고, 따라서  $c(t)$ 의 최대값은  $c(\pi) = a + b$ 임을 알 수 있다. 특히  $c(t) = a + b$ 가 되는 경우는 오직  $t = \pi$ 일 때 뿐이다.  $\square$

숙제. 6

### 3. 회전력

공간 상의 점  $P$ 에 작용하는 힘이 벡터  $\mathbf{F}$ 로 주어지고  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ 라 하면 선분  $OP$ 를  $O$  중심으로 회전시키는 토크(회전력)은  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 로 주어진다. 이 크기는  $\mathbf{F}$ 의  $OP$ 와 수직인 방향 성분이고, 방향은  $OP$  및  $\mathbf{F}$ 를 포함하는 평면과 수직하다.

예제 8.3.1.  $P = (x, y, 0)$ 이고  $\mathbf{F} = (a, b, 0)$ 이면  $P \times \mathbf{F} = (xb - ya)\mathbf{k}$ 이다.

숙제. p.302, 3.0.1



## Part III

### 곡선





## CHAPTER 9

### 곡선

#### 1. 매개화된 곡선

목표. 매개화된 곡선, 정규곡선, 내적과 외적, 원운동.

##### 1.1. 곡선의 매개화.

정의 9.1.1. 매개화된 곡선이란 구간에서 공간으로 가는 연속함수를 말한다.

즉 매개화된 곡선은 함수  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  처럼 정의된다. 우리는 이러한 곡선  $X(t)$  를 시간  $t$  에 따른 입자의 운동으로 간주한다. 이 때  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  로 쓸 수 있고,  $X$  의 연속성은 각 성분함수의 연속성을 말한다. 그리고  $t$  는 매개변수라 불린다.

예제 9.1.2. (1)  $X(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$  는 평면 위의 원을 매개화한다.

(2)  $X(t) = (t, t^3), t \in [0, 1]$  는 그래프  $y = x^3$  을 매개화한다. 이는  $Y(s) = (s^2, s^6), s \in [0, 1]$  와 같은 곡선이다.

예제 9.1.3 (데카르트 곡선).  $x^3 + y^3 = 3xy$  를 만족하는  $(x, y)$  들의 집합  $C$  는 데카르트 곡선이라 부른다. (그림 1)  $t \neq -1$  일 때,  $y = tx$  와  $C$  의 원점이 아닌 교점을 구하면  $(1 + t^3)x^3 = 3tx^2$  에서

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}, y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

으로 매개화 할 수 있음을 알 수 있다. 여기에서

$$\lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} y(t) - (-1 - x(t)) = \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} \frac{3t^2 + 3t + t^3 + 1}{1 + t^3} = \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} \frac{(t + 1)^2}{t^2 - t + 1} = 0$$

을 얻고 점근선은  $y = -1 - x$  임을 알 수 있다.

1.2. 미분가능곡선. 매개화된 곡선  $X(t)$  가  $n$  급이라 함은 각 성분함수가  $n$  급이라는 뜻이다.

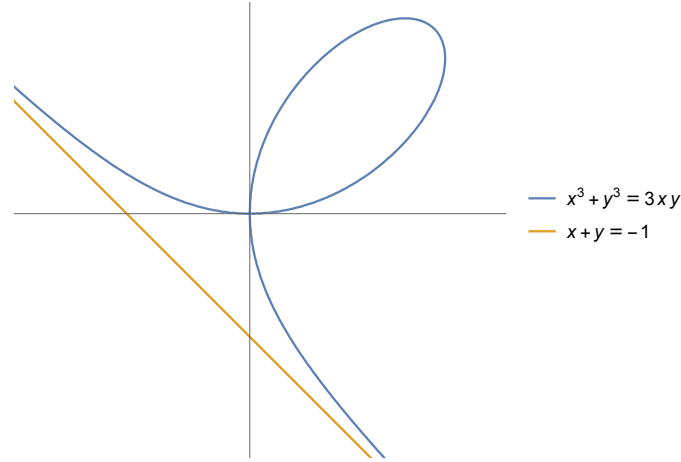


FIGURE 1. 데카르트곡선  $x^3 + y^3 = 3xy$ 와 점근선  $x + y = -1$ .

예제 9.1.4. 매개화된 곡선  $X(t) = (t, |t|), t \in [-1, 1]$ 은 일급이 아니다. 한편  $Y(t) = (t|t|, t^2), t \in [-1, 1]$ 은 같은 상을 가지는 곡선이지만 (그림 2)  $t|t|$ 는 일급함수이므로  $Y$ 는 일급이다.

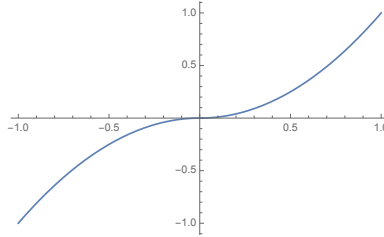


FIGURE 2.  $C^1$  곡선  $y = x|x|$ .

시간  $t$ 에 따른 입자의 운동을 나타내는 곡선  $X(t) = (x(t), y(t), \dots)$ 의 속도벡터는

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \dots \right) \\ &= (x'(t), y'(t), \dots). \end{aligned}$$

로 정의되며,  $|X'(t)|$ 는 시각  $t$ 에서의 속력이라고 부른다.

기하학적으로,  $X'(t)$ 는 접벡터라고도 불린다. 이 때  $X(t_0)$ 를 접점으로 가지고 곡선  $X$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$x = X(t_0) + tX'(t_0), t \in \mathbb{R}$$

이다.

**정의 9.1.5 (정규곡선).** 곡선  $X(t)$ 가 정규곡선이라 함은  $X(t)$ 가  $C^1$  이고 임의의  $t$ 에 대하여  $X'(t) \neq 0$ 이라는 뜻이다.

**예제 9.1.6.** 나선  $X(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, t), t \in [0, 4\pi]$ 가 주어져 있다. (그림 3)

- (1)  $X(t)$ 는 정규곡선인가?
- (2)  $t = \pi/2$ 에서 접선의 방정식을 구하시오.

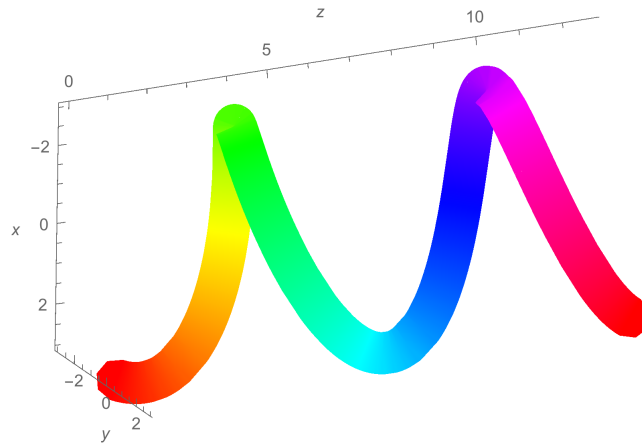


FIGURE 3. 나선  $(3 \cos t, 3 \sin t, t), 0 \leq t \leq 4\pi$ .

**예제 9.1.7.** (WolframAlpha.com)

`parametric plot (5cos(t),4sin(2t),t+sqrt(t)), 0<=t<=2Pi`

내적과 외적. 공간 상에 두 벡터함수  $X, Y: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(X \cdot Y)' = X' \cdot Y + X \cdot Y'$$

$$(X \times Y)' = X' \times Y + X \times Y'$$

PROOF.  $X(t) = (x_1(t), \dots), Y(t) = (y_1(t), \dots)$ 에 대하여

$$(X \cdot Y)' = \left( \sum_i x_i y_i \right)' = \sum_i (x'_i y_i + x_i y'_i) = X' \cdot Y + X \cdot Y'$$

또한

$$\begin{aligned} (X \times Y)' &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}' = (x_2y_3 - x_3y_2)'i + \cdots \\ &= (x_2'y_3 - x_3'y_2 + x_2y_3' - x_3y_2')i + \cdots \\ &= X' \times Y + X \times Y'. \end{aligned}$$

□

**예제 9.1.8.** 구면 위에 있는 정규곡선  $X: I \rightarrow S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| = 1\}$ 에 대하여 각 시각  $t$ 에서  $X(t)$ 와  $X'(t)$ 는 수직하다.

원운동. 공간 상에  $xy$ -평면에 평행한 평면에서의 등속원운동

$$P(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, z_0)$$

를 생각하자. 이러한 운동(motion)의 각속도란  $\omega \mathbf{k}$ 를 의미하고, 각속력은  $\omega$ 를 뜻한다. 이러한 등속원운동의 속도는

$$\mathbf{v}(t) = P'(t) = \omega \mathbf{k} \times P(t)$$

를 만족함을 알 수 있다.

보다 일반적으로, 공간 상의 평면  $\Pi$ 에서 어떤 점  $C$ 를 중심으로 하면서 반지름이  $r$ 이도록 원운동하는 입자의 운동  $X(t)$ 를 기술해보자.  $\Pi$  위에 서로 수직하는 두 단위벡터  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 가 있다면

$$X(t) = C + r \cos \theta(t) \mathbf{u}_1 + r \sin \theta(t) \mathbf{u}_2$$

가 성립한다. 우리는  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ 로 정의한다. 우리는 시각  $t$ 에서  $X$ 의 각속도는  $\boldsymbol{\omega}(t) = \theta'(t) \mathbf{u}_3$ 로 정의하고 각속력은  $\omega(t) = |\theta'(t)|$ 로 정의한다. 여기서 회전축이란  $C$ 를 지나면서  $\Pi$ 에 수직한 직선을 의미한다.

**예제 9.1.9.** 원점이 회전축 위에 놓여있고 각속도가  $\boldsymbol{\omega}(t)$ 인 공간 상의 원운동  $X(t)$ 의 속도는  $\boldsymbol{\omega}(t) \times X(t)$ 로 주어진다.

PROOF.  $\mathbf{u}_3 \parallel OC, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2$  임을 이용하면

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(t) \times X(t) &= \theta'(t)\mathbf{u}_3 \times (C + r \cos \theta(t)\mathbf{u}_1 + r \sin \theta(t)\mathbf{u}_2) \\ &= r\theta'(t) \cos \theta(t)\mathbf{u}_2 - r\theta'(t) \sin \theta(t)\mathbf{u}_1 = X'(t). \quad \square\end{aligned}$$

숙제. 3,4,5

## 2. 가속도 벡터

목표. 가속도 벡터, 접촉평면

가속도 벡터. 두번 미분가능한 곡선  $X(t)$  의 가속도벡터란  $X''(t)$  를 의미한다.

예제 9.2.1. 원운동  $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$  의 가속도 벡터는  $r''(t) = -r(t)$  를 만족함을 확인하시오.

예제 9.2.2. 공간 상의 원운동  $X(t)$  의 회전축이 원점을 지날 때,  $X''(t)$  를 각속도와  $X(t)$  로 표시하시오.

풀이.  $X' = \boldsymbol{\omega} \times X$  에서

$$X'' = \boldsymbol{\omega}' \times X + \boldsymbol{\omega} \times X' = \boldsymbol{\omega}' \times X + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times X)$$

접촉평면 (osculating plane). 곡선  $X(t)$  에 대하여  $t = t_0$  에서의 접촉평면이란  $X(t_0)$  를 지나고  $X'(t_0)$  와  $X''(t_0)$  를 포함하는 평면을 말한다:

$$\Pi : (x - X(t_0)) \cdot (X'(t_0) \times X''(t_0)) = 0.$$

예제 9.2.3. 곡선  $X = (t, t^2, t^3)$  의  $t = 1$  에서의 접촉평면을 구하시오.

풀이.  $X(1) = (1, 1, 1), X'(1) = (1, 2, 3), X''(1) = (0, 2, 6)$  이므로  $X'(1) \times X''(1) = (6, -6, 2)$  이고 접촉평면의 방정식은 다음과 같다.

$$\Pi(1) : (\mathbf{x} - (1, 1, 1)) \cdot (3, -3, 1) = 0.$$

숙제. 5

## 3. 재매개화

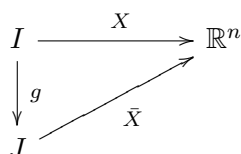
목표. 일급재매개화, 불변량, 역향곡선

**재매개화.** 나선을 따르는 입자의 운동  $X(t) = (\cos t, \sin t, 3t), t \in [0, 4]$  를 생각하자. 같은 궤적을 4배 빠르게 움직이는 운동  $Y(s) = X(4s) = (\cos 4s, \sin 4s, 12s), s \in [0, 1]$  로 주어진다. 또한 운동  $Z(u) = X(u^2), u \in [0, 2]$  는 같은 궤적을 점점 더 빠르게 움직이는 운동이다.

**정의 9.3.1.** 구간  $I, J \subseteq \mathbb{R}$ , 곡선  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 일급가역함수  $g: J \rightarrow I$  에 대하여 곡선

$$\bar{X}(t) = X \circ g(t), t \in J$$

를  $X$  의 일급재매개화라고 부른다.



**예제 9.3.2.** 평면 위에서 단위원을 한 바퀴 도는 운동  $X(t) = (\cos t, \sin t), t \in (-\pi, \pi)$  를 무한한 시간 동안의 운동으로 재매개화 하여 보자. 새로운 매개변수  $s$  를 생각하고,  $s = \tan \frac{t}{2}$  로 치환하면  $s \in (-\infty, \infty)$  가 성립한다.

$$X(t) = \left( \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}}, \frac{2 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} \right) = \left( \frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \frac{2s}{1 + s^2} \right) =: Y(s).$$

즉,  $Y(s) = X(2 \arctan s)$  가 구하는 곡선이다.

**불변량.** 주어진 곡선에 대하여 곡선의 접선, 접촉평면, 곡률, 길이, 질량중심, 접촉원 등은 곡선이 가지는 기하학적인 성질 혹은 양이다. 다만 “기하학적인” 양이란 직관적인 개념이고 수학적으로 정의된 것은 아니다. 재매개화는 같은 곡선 위를 단지 다른 방법으로 움직이는 방법이므로, 이러한 기하학적인 양은 재매개화에 의해 변하지 않을 것임을 예상할 수 있다. 우리는 이러한 직관을 수학적으로 증명하고자 한다.

**정리 3.3 (연쇄법칙의 한 경우, 정리 3.1.1)**

구간  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  과 미분가능한 함수  $g: J \rightarrow I, X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  에 대하여

$$(X \circ g)'(s) = X'(g(s)) \cdot g'(s), s \in J$$

가 성립한다.

PROOF.  $X(t) = (x(t), y(t), \dots)$ 로 두면

$$\begin{aligned} (X \circ g)'(s) &= (x(g(s)), y(g(s)), \dots)' = (x'(g(s))g'(s), y'(g(s))g'(s), \dots) \\ &= g'(s)X'(g(s)). \end{aligned} \quad \square$$

따라서 곡선의 속도는 재매개화에 의해 변할 수 있다.

**예제 9.3.4** (접선과 접촉평면). 일급재매개화에 의해 곡선  $X(t)$ 의 접선은 변하지 않는다. 곡선  $C: X(t), t \in I$ 와 그 위의 한 점  $P = X(t_0)$ 이 주어졌다. 곡선  $C$ 의  $P$ 에서의 접선은

$$L: x = P + tX'(t_0)$$

으로 주어진다. 한편 일급전단사함수  $g: J \rightarrow I$ 에 대하여  $t_0 = g(s_0)$ 으로 두었을 때 곡선  $\bar{C}: \bar{X}(s) = X(g(s))$ 의  $P = X(t_0) = \bar{X}(s_0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\bar{L}: x = P + t\bar{X}'(s_0) = P + tX'(g(s_0))g'(s_0) = P + tX'(t_0)g'(s_0)$$

이므로  $L$ 과  $\bar{L}$ 은 같은 직선임을 알 수 있다. 또한

$$\bar{X}''(s) = (X \circ g)''(s) = X''(g(s)) \cdot g'(s)^2 + X'(g(s))g''(s)$$

가 성립하므로  $\{X'(t_0), X''(t_0)\}$ 와  $\{\bar{X}'(s_0), \bar{X}''(s_0)\}$ 는 같은 평면을 생성한다. 따라서  $C$ 와  $\bar{C}$ 의  $P$ 에서의 접촉평면은 일치한다.

**역향곡선.** 곡선  $C$ 가  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 으로 주어져 있을 때에 곡선  $X_-(s) = X(a + b - s), s \in [a, b]$ 는  $X_-(a) = X(b), X_-(b) = X(a)$ 를 만족하면서  $C$ 를  $X$ 와 반대방향으로 움직이는 운동을 준다. 이 때  $X_-(s)$ 를  $X(t)$ 의 역향곡선이라고 부른다.

**예제 9.3.5.** 그래프  $y = x + 3 \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 의 매개화는

$$X(t) = (t, t + 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

으로 주어진다. 이 곡선의 역향곡선은 다음과 같다 (그림 4):

$$X_-(s) = (2\pi - s, 2\pi - s - 3 \sin s), \quad s \in [0, 1].$$



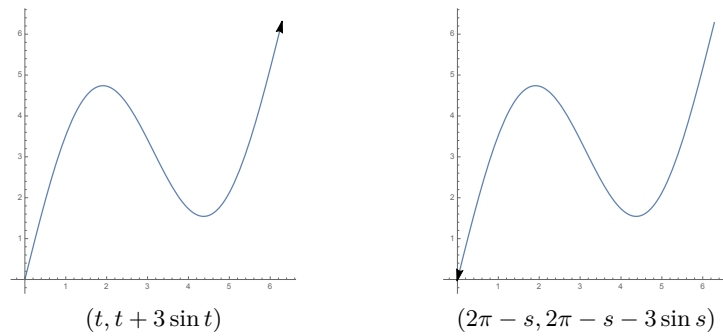


FIGURE 4. 곡선과 그 역향곡선

보다 일반적으로 일급전단사함수  $g: J \rightarrow I$ 로 주어진 재매개화  $\bar{X}(s) = X \circ g(s)$ 를 생각하자. 만일  $g'(s) < 0, \forall s$ 이면  $\bar{X}$ 는  $X$ 의 동향재매개화로 부르고, 만일  $g'(s) > 0, \forall s$ 이면  $\bar{X}$ 는  $X$ 의 역향재매개화로 부른다.

**예제 9.3.6.** 나선  $X(t) = (\cos t, \sin t, 3t), t \in (0, 2\pi]$ 를 생각하자. 이 나선의  $xy$  평면으로의 정사영은 양의 방향 (즉 위에서 볼 때 시계반대방향)으로 한 바퀴 회전하는 원운동이다. 이제

$$\bar{X}(s) = X(1/s) = (\cos 1/s, \sin 1/s, 3/s), s \in (\frac{1}{2\pi}, \infty)$$

는  $X$ 의 역향재매개화로서  $xy$  평면으로의 정사영은 음의 방향으로 한 바퀴 회전한다.

속제. 2

#### 4. 곡선의 길이

목표. 길이, 사이클로이드, 현수선, 극좌표로 주어진 곡선의 길이

정의 9.4.1 (일급곡선의 길이). 일급곡선  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 의 길이는 속력의 적분이다.

즉, 곡선  $X(t), a \leq t \leq b$ 의 길이는 다음과 같다:

$$\ell(X) = \int_a^b |X'(t)| dt$$

**직관적인 설명.** 교과서에서는 곡선의 길이를 다음과 같이 정의하고 있다. (일급일 필요는 없는) 곡선  $X(t), t \in [a, b]$ 가 있다고 하자. 구간  $[a, b]$ 의 분할이란 어떤  $k$ 에 대하여  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ 를 만족하는 수들의

집합  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  을 의미한다. 이러한 분할  $P$ 에 대하여

$$S(P, X) = \sum_{i=0}^{k-1} |X(t_{i+1}) - X(t_i)|$$

로 정의한다. 구간  $[a, b]$ 의 모든 분할들의 집합을  $\mathcal{P}[a, b]$ 라 하자. 만일  $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ 이고  $P \subseteq Q$ 이면 삼각부등식을 여러번 적용하여  $S(P, X) \leq S(Q, X)$ 임을 알 수 있다. 우리는 곡선  $X$ 의 길이를

$$\ell_0(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a, b]} S(P, X)$$

로 정의한다.

이제  $X(t) = (x(t), y(t), \dots)$ 가 일급곡선이라 가정해 보자. 충분히 작은  $h$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} & ||X(t+h) - X(t)| - |X'(t)h|| \leq |X(t+h) - X(t) - X'(t)h| \\ & = |(x(t+h) - x(t) - x'(t)h, y(t+h) - y(t) - y'(t)h, \dots)| \\ & = |(o(h), o(h), \dots)| = o(h). \end{aligned}$$

따라서  $t \in [a, b]$ 에서 곡선의 길이  $\ell_0(X)$ 는

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left| X' \left( a + \frac{b-a}{N}i \right) \right| \frac{b-a}{N} = \int_a^b |X'(t)| dt = \ell(X).$$

**참고.** (1) 위의 설명이  $\ell_0 = \ell$ 의 증명이 아닌 이유는, 임의의 분할을 생각하지 않고, 그 갯수가 무한대로 증가하는 등분 분할만을 생각하였기 때문이다.

(2) 곡선의 길이는 제곱근의 적분이 등장하기 때문에 잘 알려진 정적분 공식으로 바뀌지 않는 경우가 많다.

**4.1. 나선의 길이.** 나선  $X(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq T$ 의 길이를 구하여 보자. (그림 3) 속력은  $|X'(t)| = |(-a \sin t, a \cos t, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 로 주어지므로 구하는 길이는  $\int_0^T \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2}T$ 이다.

**4.2. 사이클로이드.** 반지름의 길이가  $a$ 인 바퀴가 평면위에서 미끄러짐 없이 각속도 1의 회전을 하여 굴러 간다고 하자.  $t = 0$ 에서 바닥과 접하는 바퀴 위의 점  $P$ 가 바퀴의 회전에 따라 움직이는 자취를 사이클로이드라고 부른다. 미끄러짐이 없다는 가정에서, 바퀴의 중심의 자취는  $C(t) = (at, a)$ 로 주어지고,

따라서  $P$ 의 시각  $t$ 에서의 위치는

$$X(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$$

이다. (그림 5) (위키피디아 링크) 이제 사이클로이드의 한 주기  $[0, 2\pi]$ 의 길이를 구하여 보자.  $X'(t) = (a - a \cos t, a \sin t)$ 에서 속력은

$$|X'(t)| = 2a \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}$$

이고 따라서 구하는 길이는

$$\int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = \left[ -4a \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

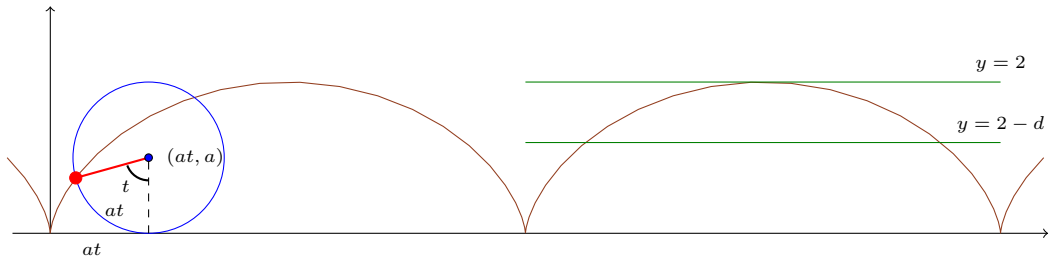


FIGURE 5. 사이클로이드.

#### 예제 9.4.2. 사이클로이드

$$X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

의 일부로서,  $y = 2 - d$  위에 존재하는 부분의 길이를 구하여 보자. (단  $0 \leq d \leq 2$ ). 먼저  $1 - \cos s = 2 - d$ 를 풀어서  $s = \arccos(d - 1) \in [0, \pi]$ 인  $s$ 를 잡고,  $s' = 2\pi - s$ 로 두면  $X(s), X(s')$ 이  $X$ 와  $y = 2 - d$ 의 두 교점이 된다. 또한

$$\cos(s/2) = -\cos(s'/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos s}{2}} = \sqrt{\frac{d}{2}}$$

이다. 이제  $|X'(t)| = 2 \sin(t/2)$ 에서 구하는 길이는

$$\int_s^{s'} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[ -4 \cos \frac{t}{2} \right]_s^{s'} = 4 \left( \cos \frac{s}{2} - \cos \frac{s'}{2} \right) = 8 \sqrt{\frac{d}{2}} = 4\sqrt{2d}.$$

**4.3. 그래프의 길이.** 그래프  $y = f(x), x \in [a, b]$ 는 곡선  $X(t) = (t, f(t)), t \in [a, b]$ 로 생각할 수 있다. 따라서 그 길이는  $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ 로 주어진다.

**예제 9.4.3.** 부록에서 우리는 양끝점이 같은 높이로 고정된 현수선의 방정식이  $y = \frac{1}{a} \cosh ax$ 로 주어짐을 보일 것이다. (그림 6) 이제 편의상  $a = 1$ 로 두고, 현수선  $y = \cosh x, x \in [0, b]$ 의 길이  $\ell$ 을 구하면,  $y' = \sinh x$ 에서 다음을 얻는다.

$$\ell = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_0^b \cosh x dx = \sinh b.$$

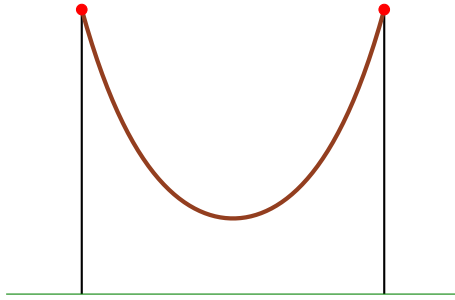


FIGURE 6. 현수선.

**4.4. 극좌표로 주어진 곡선의 길이.** 극좌표로 주어진 곡선  $r = f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ 는 매개곡선  $X(t) = (f(t) \cos t, f(t) \sin t), t \in [\alpha, \beta]$ 로 간주할 수 있고, 따라서 그 길이는

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{\alpha}^{\beta} |X'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |(f' \cos t - f \sin t, f' \sin t + f \cos t)| dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2 + f'^2} dt \end{aligned}$$

으로 주어진다.

**예제 9.4.4.** 심장형 곡선  $r = 1 - \cos \theta, (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 의 길이는

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[ -4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

**4.5. 구면 측지선.** 우리는 예제 8.2.9에서 구면 위의 두 점  $P, Q$ 를 잇는 대원호의 길이  $t$ 는  $\cos t = P \cdot Q$ 를 만족함을 보았다. 이러한 대원을 우리는 구면 측지선이라고도 부른다.

우리는 구면 위의 두 점  $P, Q$ 를 잇는 구면 위의 곡선  $X(t)$ 가 미분가능한 함수  $\phi(t), \theta(t)$ 에 대하여

$$X(t) = (\sin \phi(t) \cos \theta(t), \sin \phi(t) \sin \theta(t), \cos \phi(t)), \quad t \in [0, 1]$$

주어지는 경우, 곡선  $X$  길이의 최소값은 바로 이 곡선이  $P$ 와  $Q$ 를 잇는 대원호 두 개 중에서 더 길지 않은 것일 때 얻어짐을 증명한다. 편의상  $P = X(0)$ 와  $Q = X(1)$ 이 같은 경도를 가진다고 가정할 수 있다. 즉  $\theta(0) = \theta(1), \phi(0) < \phi(1)$ 을 가정하고,  $X$ 의 길이가  $\phi(1) - \phi(0)$ 보다 크거나 같음을 보이고자 한다.

먼저  $X$ 의 속도는

$$X' = (\phi' \cos \phi \cos \theta - \theta' \sin \phi \sin \theta, \phi' \cos \phi \sin \theta + \theta' \sin \phi \cos \theta, -\phi' \sin \phi)$$

로 주어지므로

$$|X'|^2 = \phi'^2 + \theta'^2 \sin^2 \phi \geq \phi'^2$$

이고 따라서  $X$ 의 길이  $\ell$ 은

$$\ell = \int_0^1 |X'(t)| dt \geq \int_0^1 |\phi'| dt \geq \int_0^1 \phi' dt = \phi(1) - \phi(0).$$

등호는  $\theta'$ 가 항상 0일 때 성립하므로, 이는  $\theta$ 가 상수, 즉  $X$ 가 경도선임을 의미한다.

편의상, 구면 위의 두 점  $A, B$ 를 잇는 두 개의 대원호 중에서 더 길지 않은 것의 길이를  $\text{Arc}(A, B)$ 로 표시하도록 하자. 그러면 예제 8.2.9에 의해  $\text{Arc}(A, B) + \text{Arc}(B, C) \geq \text{Arc}(A, C)$ 가 성립하며, 등호는  $A, B, C$ 가 같은 대원 위에 있을 때 성립한다. 이를 이용하면 다음과 같이 더 강력한 사실을 증명할 수 있다.

**문제 4.1 (탐구문제).** 예제 8.2.9를 이용하여 일급이 아닐 수도 있는 구면 곡선을 허용하여도 구면 위의 임의의 두 점을 잇는 최단 길이의 곡선은 반드시 측지선임을 증명하라.

**PROOF.** 임의의 양수  $\epsilon > 0$ 을 고정하자. 구면 위의 두 점  $Q, R$ 에 대하여 그 직선거리  $QR$ 은  $QR = 2 \sin(\text{Arc}(Q, R)/2)$ 로 주어지므로

$$\frac{QR}{\text{Arc}(Q, R)} = \frac{\sin(\text{Arc}(Q, R)/2)}{\text{Arc}(Q, R)/2}.$$

따라서 어떤  $\delta > 0$ 가 존재하여 만일 구면 위의 두 점  $Q, R$ 이  $QR < \delta$ 을 만족하면

$$1 - \epsilon < \frac{QR}{\text{Arc}(Q, R)} < 1 + \epsilon$$

을 만족하도록 할 수 있다.

이제 구면 위 임의의 두 점  $A = X(0), B = X(1)$ 을 잇는 (일급일 필요는 없는 연속한) 곡선  $X(t), t \in [0, 1]$ 을 생각하자. 상한(supremum)의 정의에 의해  $\ell(X) - \epsilon < S(P, X)$ 를 만족하는  $[0, 1]$ 의 분할  $P$ 가 존재하고, 이러한  $P = \{x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_k = 1\}$ 를 필요하다면 더욱 잘게 쪼개서 우리는  $X(x_i)$ 와  $X(x_{i+1})$  사이의 직선 거리가  $\delta$ 보다 작게 할 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned} S(P, X) &= \sum_{i=0}^{k-1} |X(x_{i+1}) - X(x_i)| > (1 - \epsilon) \sum_{i=0}^{k-1} \text{Arc}(X(x_i), X(x_{i+1})) \\ &\geq (1 - \epsilon) \text{Arc}(A, B) \end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서 가장 아래줄의 부등식은 예제 8.2.9을  $k$ 번 적용하여 얻은 것이다.  $\ell(X) \geq (1 - \epsilon) \text{Arc}(A, B) + \epsilon$ 이 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대해 성립하므로  $\ell(X) \geq \text{Arc}(A, B)$ 를 얻는다. 그리고 등호는  $X$ 의 모든 점들이  $A$ 와  $B$ 를 잇는 대원 상에 있을 때 성립하므로  $X$ 가 바로 원하는 대원호임을 알 수 있다.  $\square$

숙제. 3, 7

## 5. 극좌표계와 영역의 넓이

우리는 이미 4장 2절에서 극좌표로 주어진 영역

$$0 \leq r \leq f(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$$

의 넓이를 공식

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r=0}^{f(\theta)} r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

을 이용하여 구하는 예제를 풀어보았다. 이 공식은 직관적으로 충분히 작은  $h = (\beta - \alpha)/N$ 에 대하여 영역

$$A(\theta, h) = \{(r \cos t, r \sin t) : t \in [\theta, \theta + h], r \in [0, f(t)]\}$$

의 넓이를 부채꼴의 넓이  $\frac{1}{2}f(\theta)^2h$ 로 근사한 후에 이를  $\theta = \alpha, \alpha+h, \alpha+2h, \alpha+3h, \alpha+\dots, (N-1)h$ 에 대하여 더함으로써

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}f\left(\alpha + i\frac{\beta-\alpha}{N}\right) \frac{\beta-\alpha}{N} \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}f(\theta)^2d\theta$$

로 얻어진다고 이해할 수 있다. 엄밀한 증명은 후에 이중적분의 변수 변환 공식을 증명함으로써 얻을 것이다.

숙제. 2, 4

## 6. 호의 길이와 재매개화

곡선  $X(t), t \in [a, b]$ 가 호의 길이로 매개화되었다함은  $|X'(t)| = 1$ 임을 의미한다. 이는  $s < t$ 에 대하여  $X(s)$ 에서  $X(t)$ 까지의 호의 길이가  $t-s$ 임을 의미한다. 즉 매개변수의 차이가 바로 호의 길이라는 것이다.

정리 9.6.1 (정리 6.0.1). 정규곡선의 호의 길이로 매개화할 수 있다.

PROOF. 정규곡선  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 주어져 있다고 하고,  $L$ 을 곡선  $X$ 의 (전체) 길이라고 하자. 함수  $s: [a, b] \rightarrow [0, L]$ 을

$$f(t) = \int_a^t |X'(u)|du$$

와 같이 정의하면  $f(t)$ 는 곡선  $X$ 에서  $X(a)$ 에서  $X(t)$ 까지 부분의 길이이고,  $f'(t) = |X'(t)| > 0$ 가 된다.  $f$ 는 강증가함수이므로 전단사함수이고 그 역함수  $g: [0, L] \rightarrow [a, b]$ 가 존재하여  $g'(s) = \frac{1}{f'(g(s))} > 0$ 이다. 이제  $X$ 의 재매개화  $Y = X \circ g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$|Y'(s)| = |X'(g(s))| \cdot g'(s) = \frac{|X'(g(s))|}{f'(g(s))} = 1$$

이 성립한다. 따라서  $Y$ 는  $X$ 를 호의 길이로 재매개화한 곡선이다.  $\square$

이 절에서는 정리보다 예제를 많이 풀어보는 것이 훨씬 더 중요하다. 실제로 예제를 푸는 것이 위의 정리를 주어진 곡선에 대해 증명하는 것과 같다.

예제 9.6.2. 나선  $X(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in [0, 2\pi]$ 를 호의 길이로 재매개화하라.

풀이.  $|X'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 임을 구하였으므로 호의 길이를 나타내는 함수  $s = f(t) = \int_0^t |X'| = \sqrt{a^2 + b^2}t$ 이다. 이제  $s = \sqrt{a^2 + b^2}t$ 로 두면  $t =$

$s/\sqrt{a^2+b^2}$ 이므로  $f$ 의 역함수는  $t = g(s) = s/\sqrt{a^2+b^2}$ 로 주어지고 따라서 구하는 재매개화는

$$Y(s) = X(g(s)) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right),$$

$$s \in [0, 2\pi\sqrt{a^2+b^2}].$$

우리는  $|Y'(s)| = 1$ 을 쉽게 검산할 수 있다.

보다 일반적으로 속력이  $v$ 로 일정한 등속운동  $X(t), t \in [a, b]$ 을 호의 길이로 재매개화하면

$$Y(s) = X\left(\frac{s}{v}\right), s \in [va, vb]$$

이다.

**예제 9.6.3.** 로그와선  $r = e^\theta$ 를 호의 길이로 재매개화하라.

PROOF. 로그와선을  $t \in (-\infty, \infty)$ 에 대하여  $X(t) = e^t(\cos t, \sin t)$ 로 매개화하면  $X'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$ 이다.

$$s = s(t) = \int_{-\infty}^t |X'(u)| du = \int_{-\infty}^t \sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}e^t,$$

$$t = t(s) = \log \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

따라서 구하는 재매개화는  $s \in (0, \infty)$ 에 대하여

$$Y(s) = X(t(s)) = \frac{s}{\sqrt{2}} \left( \cos \log \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \sin \log \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

□

숙제. 1, 2

## 7. 선적분

목표. 중심, 질량중심, 재매개화

총질량과 선적분.

질문 9.7.1. 공간 상에 선밀도가 2인 곡선  $X(t), t \in [a, b]$ 가 주어져 있을 때, 이 곡선의 총질량은?



구하는 총질량은

$$M = \int_a^b 2|X'(t)|dt = 2\ell(X)$$

로 주어진다. 보다 일반적으로 매개화된 곡선  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 의 각 점  $X(t)$ 에서 선밀도가  $\rho(t)$ 일 때 곡선  $X$ 의 총질량은

$$M = \int_a^b \rho(t)|X'(t)|dt$$

이다. 이러한 적분은 워낙 자주 등장하기 때문에 간략하게

$$M = \int_X \rho ds$$

로 쓰고, 함수  $\rho$ 의 곡선  $X$ 에서의 선적분이라고 부른다. 특히  $X$ 의 길이는  $\int_X 1ds$ 이다.

**예제 9.7.2.** 나선  $X(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ 의 각 점  $X(t)$ 에서의 선밀도가  $t^2$ 으로 주어졌다면 총질량은

$$M = \int_0^{2\pi} t^2|X'|dt = \int_0^{2\pi} t^2\sqrt{5}dt = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} t^2dt = \frac{8\sqrt{5}\pi^3}{3}.$$

길이가  $\ell$ 인 곡선  $X$  위에 정의된 함수  $f$ 의 평균값은

$$\bar{f} = \frac{1}{\ell} \int_X f ds = \frac{\int_X f ds}{\int_X 1ds}$$

로 정의된다.

**예제 9.7.3.** 평면의 온도 분포가 각 점  $(x, y)$ 에서  $T(x, y) = x + y$ 로 주어졌을 때 그래프  $y = x, 0 \leq x \leq 2$ 의 평균온도를 구하여라.

**풀이.** 곡선  $X(t) = (t, t)$ ,  $t \in [0, 2]$ 를 생각하면  $|X'| = \sqrt{2}$ 이고, 길이는  $\ell = 2\sqrt{2}$ 이다. 평균온도는

$$\bar{T} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_X T ds = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^2 T(X(t))|X'(t)|dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^2 (t+t)\sqrt{2}dt = 2.$$

**예제 9.7.4** (미적분학 및 연습 1 기말고사, 2012-06-09). 곡선

$$X: \quad x^{2/3} - y^{2/3} = 1, \quad 1 \leq x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 3\sqrt{3}$$

의 밀도함수가  $f(x, y) = \sqrt{x^{2/3} + y^{2/3}}$ 일 때 곡선  $X$ 의 질량을 구하시오.

**풀이.**  $\cosh s = 2$ 인 양수  $s$ 와 치환  $x = \cosh^3 t, y = \sinh^3 t$ 에 대하여, 주어진 곡선은

$$X: (\cosh^3 t, \sinh^3 t), \quad t \in [0, s]$$

으로 주어진다. 따라서  $X'(t) = 3 \cosh t \sinh t (\cosh t, \sinh t)$  이고

$$\begin{aligned} \int_X f \, ds &= \int_0^s f(\cosh^3 t, \sinh^3 t) |X'(t)| dt \\ &= \int_0^s 3 \cosh t \sinh t \sqrt{\cosh^2 t + \sinh^2 t} \sqrt{\cosh^2 t + \sinh^2 t} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^s \sinh(2t) \cosh(2t) dt = \frac{3}{4} \int_0^s \sinh(4t) dt = \frac{3}{16} (\cosh(4s) - 1) dt \\ &= \frac{3}{16} (2 \cosh(2s) - 2) dt = \frac{3}{16} (4 \cosh(s) - 4) dt = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

**7.1. 곡선의 중심.** 공간 상의 항등함수  $\text{Id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{Id}(x) = x$ 을 생각하자. 길이가  $\ell$ 인 곡선  $X$ 의 기하학적 중심 (*centroid*)은 다음과 같이 주어진다.

$$x_C = \frac{1}{\ell} \int_X \text{Id} \, ds.$$

이 등식을 풀어서 쓰면 중심  $x_C = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ 의 각 좌표는

$$\bar{x}_i = \frac{1}{\ell} \int_X x_i \, ds = \frac{1}{\int_X x_i \, ds} \int_X 1 \, ds$$

로 쓰여진다. 즉, 곡선의 중심의  $i$ 번째 좌표는 곡선의  $i$ 번째 좌표들의 평균값이다. 이항하면

$$\int_X (x_i - \bar{x}_i) \, ds = 0$$

을 얻는다.

**예제 9.7.5. 나선**

$$X(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

의 중심을 구하여 보자. 먼저  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = |X'(t)|$ 로 두면  $\int_X 1 \, ds = 2\pi c$ 이다.

$$2\pi c \bar{x} = \int_X x \, ds = \int_0^{2\pi} a \cos t \, c \, dt = 0, \quad \frac{1}{2\pi c} \bar{y} = 0$$

을 얻고

$$2\pi c \bar{z} = \int_X z \, ds = \int_0^{2\pi} b t \, c \, dt = bc \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2 bc$$

이므로  $\bar{z} = b\pi$ 를 얻는다.

참고 (파푸스의 중심 정리). 곡선  $C$ 를 회전시켜서 얻은 곡면의 넓이는 곡선  $C$ 의 길이에 곡선  $C$ 의 무게중심이 이동한 거리를 곱한 것과 같다.

- (1) 예를 들어, 반지름이  $a$ 인 반원의 중심이 지름으로부터  $d$ 만큼 떨어져 있다고 하자. ( $d < a$ ) 이 반원의 지름을 따라 한 바퀴 회전시키면 중심의 이동거리는  $2\pi d$ 이다. 따라서

$$4\pi a^2 = 2\pi d \cdot \pi a$$

에서  $d = \frac{2a}{\pi}$ 를 얻는다. 이는 더 높은 차원에서도 성립한다.

- (2) 또한, 반지름  $a$ 인 원을 그 중심에서  $d$ 만큼 떨어진 회전축을 중심으로 회전시켜 torus가 얻어졌다면 ( $d > a$ ) 그러한 torus의 표면적은  $2\pi d \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ad$ 가 된다.

**7.2. 곡선의 질량중심.** 이제 곡선  $X(t)$ 의 한 점  $P$ 에서의 선밀도함수가  $\mu(P)$ 로 주어진다면 곡선  $X$ 의 질량은

$$M = \int_X \mu ds$$

이고 질량중심은

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_X \text{Id}(x) \mu ds = \frac{\int_X \text{Id} \mu ds}{\int_X \mu ds}.$$

이 식을 풀어쓰면  $x_{CM} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ 의 각 좌표는

$$\bar{x}_i = \frac{1}{M} \int_X x_i \mu ds$$

로 쓰여진다. 즉, 곡선의 중심의  $i$ 번째 좌표는 곡선의  $i$ 번째 좌표들의 가중평균값이다.

**예제 9.7.6.** 반지름 1인 반원  $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$ 의 선밀도가  $y$ 로 주어졌을 때 질량중심을 구하여라.

**풀이.** 매개화  $X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), t \in [0, \pi]$ 를 생각하면 속력은  $|X'| = 2$ 이다. 총질량은

$$M = \int_X y ds = \int_0^\pi 2 \sin t |X'| dt = 4 \int_0^\pi \sin t dt = 8$$

이다. 이제 질량중심이  $(\bar{x}, \bar{y})$  라 하면

$$M\bar{x} = \int_X x\mu \, ds = \int_X xy \, ds = \int_0^\pi 4 \cos t \sin t \cdot 2dt = 4 \int_0^\pi \sin 2t \, dt = 0$$

인데, 이는 대칭성에서부터도 자명하다. 또한

$$M\bar{y} = \int_X y\mu \, ds = \int_X y^2 \, ds = \int_0^\pi 4 \sin^2 t \cdot 2dt = 4 \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = 4\pi$$

이므로  $\bar{y} = \pi/2$ 를 얻는다. 따라서 질량중심은  $(0, \pi/2)$ 이다.

### 7.3. 선적분과 매개화.

#### 정리 7.7 (정리 7.3.1)

선적분은 재매개화에 대하여 변하지 않는다.

PROOF. 곡선  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  과 강증가 전단사함수  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$  가 주어져 있다고 하고 재매개화  $Y = X \circ g$  를 생각하자. 곡선  $X$  위에 정의된 함수  $f: X([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$  에 대하여

$$\begin{aligned} \int_Y f \, ds &= \int_c^d f(Y(s)) |Y'(s)| ds = \int_c^d f(X(g(s))) |X'(g(s))| g'(s) ds \\ &= \int_a^b f(X(t)) |X'(t)| dt = \int_X f \, ds \end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서 마지막 줄에서는 치환적분  $t = g(s)$  를 이용하였다.  $g$  가 강감소일 때도 증명은 거의 동일하다.  $\square$

따라서 곡선의 질량중심이나 곡선 위에서 정의된 함수의 평균 등은 재매개화에 대하여 변하지 않는다.

숙제. 1, 4

## 8. 곡선과 곡률

목표. 곡률, 접촉원

매개곡선  $X(t)$  의 단위접벡터, 혹은 접방향은

$$\mathbf{t} = \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

를 의미한다. 호의 길이는  $s(t) = \int_a^t |X'(u)| du$ 로 주어짐을 상기하자. 따라서 그 역함수  $t = t(s)$ 에 대하여

$$\frac{ds}{dt} = |X'|, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|X'|}$$

이다. 접방향의 호의 길이에 따른 변화율

$$\kappa = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|X'|} \left( \frac{X'}{|X'|} \right)'$$

을  $X(t)$ 의 곡률 (*curvature*) 벡터라고 부른다. 그리고 곡률벡터의 크기

$$\kappa = |\kappa|$$

를 곡률이라고 부른다. 또한  $1/\kappa$ 를 곡률반경으로 정의한다.

이는 곡선  $X(t)$ 를 호의 길이로 재매개화하여 곡선  $Y(s)$ 를 얻은 후 (즉 여기서  $Y$ 는 단위속력곡선이다)

$$\mathbf{t} = Y', \quad \kappa = Y'', \quad \kappa = |Y''|$$

로 정의한 것과 같다. 따라서 곡률은 재매개화에 대하여 (호의 길이로 재매개화한 매개곡선은 결국 같으므로) 변하지 않는다. 곡률은 곡선의 휨 정도를 나타낸다.

직선의 곡률. 호의 길이로 매개화된 직선은  $P \in \mathbb{R}^n$ 과  $|v| = 1$ 인 벡터  $v$ 에 대하여

$$L: Y(s) = P + sv, s \in \mathbb{R}$$

로 주어진다. 이 때  $Y''(s) = \mathbf{0}$ 이므로  $\kappa = 0$ 이고 곡률반경은 무한대이다.

원의 곡률. 중심이  $C$ 이고 반지름이  $r$ 인 원운동은 서로 수직인 적절한 단위벡터  $v, w$ 에 대하여

$$X(t) = C + r \cos tv + r \sin tw$$

로 주어진다. 이 때  $X'(t) = -r \sin tv + r \cos tw$ 이므로  $|X'| = r$ 이다. 따라서 호의 길이  $s = rt$ 에서  $X$ 를 호의 길이로 재매개화한 곡선은

$$Y(s) = C + r \cos \frac{s}{r} v + r \sin \frac{s}{r} w$$

임을 알 수 있다. 이제

$$Y'' = -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} v - \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} w = \frac{C - Y}{r^2}.$$

**예제 9.8.1.** 곡선  $X(t) = (1, 2 + 3 \cos t - 3\sqrt{3} \sin t, 3 + 3\sqrt{3} \cos t + 3 \sin t)$  을 곡률을 구하여 보자.

$$X(t) = (1, 2, 3) + 6 \cos t \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6 \sin t \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

이므로  $X$ 는 중심이  $(1, 2, 3)$  이고 반지름이 6인 원이다. 따라서 곡률은  $1/6$  이다.

**8.1. 접촉원.** 곡선  $X(t)$ 의  $t=0$ 에서의 접선  $L(t) = X(0) + X'(0)t$  은

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|X(t) - L(t)|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|X(t) - X(0) - X'(0)t|}{t} = 0$$

을 만족하도록 잡은 직선이다. 즉  $X(t) = L(t) + o(t)$ 가 성립한다.

**정의 9.8.2.** 주어진 곡선  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  위의 한 점  $X(t_0)$ 에서의 접촉원 (*osculating circle*)이란

$$X(t) = C(t) + o((t - t_0)^2)$$

이 성립하는 원  $C(t)$ 를 말한다.

즉  $C(t)$ 는  $L(t)$ 보다 더 좋은 근사인 것이다.

### 정리 8.3

호의 길이로 매개화된 삼급곡선  $X(s)$  위의 한 점  $X(0)$ 에서의 접촉원은

$$\kappa = \kappa(0), \kappa = \kappa(0), \mathbf{t} = \mathbf{t}(0)$$

에 대하여 다음과 같이 주어진다.

$$C(s) = X(0) + \frac{\kappa}{\kappa^2} + \cos(\kappa s) \left(-\frac{\kappa}{\kappa^2}\right) + \sin(\kappa s) \left(\frac{\mathbf{t}}{\kappa}\right).$$

**보조정리 9.8.4** (다변수 테일러전개의 특수한 경우).  $X: I = (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$  이 삼급곡선이라면 매개곡선  $Y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  이 존재하여  $Y(0) = \mathbf{0}$  이고 임의의

$h \in I$ 에 대하여 다음이 성립한다:

$$X(h) = X(0) + hX'(0) + \frac{h^2}{2}X''(0) + h^2Y(h).$$

PROOF.  $X(t) = (x(t), y(t), \dots)$ 의 각 성분에 테일러 정리를 적용하면

$$x(h) = x(0) + hx'(0) + \frac{h^2}{2}x''(0) + o(h^2)$$

$$y(h) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2}y''(0) + o(h^2)$$

...

을 얻는다. 이제 곡선  $Y$ 를  $Y(0) = \mathbf{0}$ 과  $h \neq 0$ 일 때

$$Y(h) = \frac{X(h) - \left(X(0) + hX'(0) + \frac{h^2}{2}X''(0)\right)}{h^2}$$

로 정의하자. 그러면  $h \neq 0$ 일 때  $Y$ 가 연속임은 자명하고,  $\lim_{h \rightarrow 0} Y(h) = \mathbf{0} = Y(0)$ 이다.  $\square$

정리 9.8.3의 증명. 일반성을 잃지 않고  $X(0) = \mathbf{0}$ 임을 가정하자. 먼저,  $X = X(s)$ 가 호의 길이로 매개화된 경우를 생각한다. 서로 수직인 어떤 단위 벡터  $u, v$ 와  $r, \omega > 0$ 이 존재하여  $X(0) = \mathbf{0}$ 에서의 접촉원이

$$C(s) = C_0 + r \cos(\omega s)u + r \sin(\omega s)v$$

로 주어졌다고 가정할 수 있다. 이 때  $C(0) = \mathbf{0}$ 에서  $C_0 = -ru$ 를 얻는다. 이제 보조정리 9.8.4에 의해 어떤 매개곡선  $Y$ 가 존재하여  $Y(0) = \mathbf{0}$ 이고 다음이 성립한다.

$$X(s) = sX'(0) + \frac{s^2}{2}X''(0) + s^2Y(s).$$

또한

$$C(s) = -r \frac{\omega^2 s^2}{2}u + r\omega sv + o(s^2)u + o(s^3)v$$

이 성립하므로 적절한 매개곡선  $Z: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 존재하여  $Z(0) = \mathbf{0}$ 이고

$$\frac{X(s) - C(s)}{s^2} = s(X'(0) - r\omega v) + \frac{s^2}{2}(X''(0) + r\omega^2 u) + s^2Z(s)$$

따라서 접촉원의 정의와 로피탈의 정리를 사용하여 다음을 얻는다.

$$X'(0) = r\omega v, X''(0) = -r\omega^2 u.$$

$|u| = |v| = 1 = |X'|$ ,  $\kappa = |X''|$ 에서  $\omega = 1/r = \kappa$ 를 알 수 있고 따라서

$$v = X'(0), u = -\frac{X''(0)}{\kappa} = -\frac{\kappa}{\kappa}$$

이고 원하는 식은 다음을 얻는다:

$$C(s) = \frac{\kappa}{\kappa^2} - \frac{\cos(\kappa s)\kappa}{\kappa^2} + \frac{\sin(\kappa s)\mathbf{t}}{\kappa}.$$

□

문제 8.1. 평면 위의 두 곡선  $X, Y$ 가 각  $t$ 에 대하여  $X(t) \neq Y(t)$ 와  $|X'(t)| \leq M, |Y'(t)| \leq M$ 을 만족할 때

$$Z(t) = \frac{X(t) - Y(t)}{|X(t) - Y(t)|}$$

로 정의된 곡선의 속력은

$$|Z'(t)| \leq \frac{2M}{|X(t) - Y(t)|}$$

을 만족함을 증명하라.

숙제. 1, 3, 12

## 9. 부록: 현수선, 가까운 곡선, 등시곡선

9.1. 현수선. 질량이 균일한 선의 양끝을 적절한 너비와 같은 높이로 고정 하였을 때 중력에 의하여 생긴 선의 모양을 현수선이라 부른다. (그림 6)

보조정리 9.9.1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x + C.$$

PROOF.

$$y = \operatorname{arcsinh} x, x = \sinh y$$

로 두면  $1 = (\cosh y)y'$ 에서

$$y' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

□

현수선의 방정식  $y = f(x)$ 가 주어졌다고 하자. (그림 7) 가장 낮은 점을  $f(0)$ 로 잡음으로써 대칭성에 의해  $f'(0) = 0$ 를 가정할 수 있다. 각 점  $(x, f(x))$



에서 장력의 크기가  $T(x)$  라면  $\mathbf{u}(x) = (1, f'(x))/\sqrt{1 + f'(x)^2}$  에 대하여

$$T(x + \Delta x)\mathbf{u}(x + \Delta x) - T(x)\mathbf{u}(x) - (w\Delta s)g\mathbf{j} = 0.$$

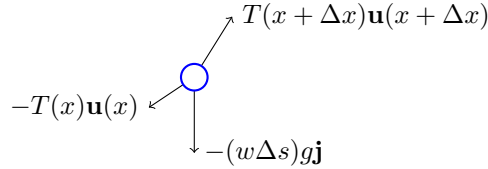


FIGURE 7. 현수선에서 힘의 평형.

한편  $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$  에서

$$\frac{d}{dx} \left( T(x) \frac{(1, f'(x))}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) = wg\sqrt{1 + f'(x)^2} \mathbf{j}$$

따라서

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{T(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) = 0$$

에서  $T(x) = c\sqrt{1 + f'(x)^2}$  를 얻는다.

$$\frac{d}{dx}(cf'(x)) = \frac{d}{dx} \left( \frac{T(x)f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) = wg\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

$$wg\sqrt{1 + f'(x)^2} = cf''(x)$$

$$wgx = c \int_0^x \frac{f''(t)dt}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} = c \int_0^x \frac{d(f'(t))}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} = c \operatorname{arcsinh}(f'(x))$$

$C = wg/c$  로 두면

$$f'(x) = \sinh(\alpha x)$$

이므로 상수항을 적절히 조절하면

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x)$$

을 얻는다.

**9.2. 정사각형 모양의 바퀴: 생략.**

**9.3. 가까운 곡선: 생략.**

**9.4. 등시곡선 tautochrone.** 등시곡선이란 공을 어디에 두어도 최저점까지 내려가는 시간이 일정한 곡선이다.

사이클로이드

$$x = u - \sin u, y = 1 + \cos u, 0 \leq u \leq 2\pi$$

가 등시곡선임을 증명하자. 최저점의 높이는 0이다.

$s = s(y)$ 를 최저점에서부터의 높이  $y$  지점까지의 호의 길이로 정의하면  $s(-2) = 0, s(y) = 2\sqrt{2y}$ 임을 이미 증명하였다. 최초의 위치에너지는  $mgy_0$ , 운동에너지는 0이라면, 높이  $y$ 에서의 속도  $v = v(y)$ 에 대하여

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

이이므로  $\frac{ds}{dt} = v = -\sqrt{2g(y_0 - y)}$ 를 얻는다.

따라서  $y = y_0$  지점에서 최저점  $y = 0$ 까지 걸리는 시간은

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\sqrt{2y_0}} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{gy(y_0 - y)}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1/4 - (t - 1/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

숙제. 기본연습문제 9.3.2



## Part IV

# 다변수함수와 미분법



## CHAPTER 10

# 다변수함수

### 1. 그래프와 등위면

$n$  변수 함수. 예: 온도.

2변수 함수의 그래프. 예: 고도.

등위면 (level surface).

### 2. 연속함수

다변수 함수의 수렴값.

불연속성.

유계인 집합.

열린 공과 영역의 내점 (interior point).

열린 집합과 닫힌 집합.

최대 최소 정리.

정리 10.2.1. 유계인 닫힌 집합  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 에서 정의된  $n$  변수 함수는 최대값과 최소값을 가진다.

### 3. 방향미분과 편미분

2015/9/6

편미분, 그래디언트 벡터.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = D_i f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + te_i) - f(P)}{t}.$$

$$\nabla f(P) = (D_i f(P)).$$

방향미분.

$$D_v f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + tv) - f(P)}{t}.$$

정리 10.3.1.  $D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot v$ .

증명은 연쇄법칙 뒤로 미룬다.

기하학적 의미.

정리 10.3.2. 주어진 함수  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 와 점  $P \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여  $\nabla f(P)$ 가 존재한다고 하자.

- (1)  $\nabla f(P)$ 의 방향은  $f$ 가 가장 빨리 증가하는 방향이다.
- (2)  $\nabla f(P)$ 의 방향은 단위벡터에 대한  $f$ 의 방향 미분의 최대값이다.

우리는  $\nabla f(P) = Df(P)$ 라고도 쓴다.

**4. 미분가능함수**

미분가능성. 1변수 함수의 예.  $\nabla f(P)$ 는 존재하지만  $f$ 는 미분가능하지 않은 예. (p.465 참조)

정리 10.4.1.  $n$  변수 함수  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음은 동치이다:

- (A)  $f$ 가  $P$ 에서 미분가능.
- (B)  $\nabla f(P)$ 가 존재하고  $f(P + \vec{v}) = f(P) + \nabla f(P) \cdot \vec{v} + o(\vec{v})$ 가 임의의  $\vec{v}$ 에 대하여 성립한다.

1급 함수.

정의 10.4.2.  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  이  $U$ 에서  $C^1$  (일급함수)이라 함은,  $\nabla f$ 가  $U$ 의 각 점에서 존재하고 연속이라는 것이다.

정리 10.4.3.  $f$ 가  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 에서  $C^1$  이면  $U$ 의 각 점에서 미분가능하다.

**5. 연쇄법칙**09/09. 파리의 온도변화 문제.

정리 10.5.1.  $n$  공간의 열린 집합  $U$ 에서 미분가능한 함수  $f$ 와 구간  $I$ 에서 정의된 미분가능한 곡선  $X: I \rightarrow U$ 에 대하여:

$$\frac{d}{dt} f(X(t)) = \nabla f \circ X(t) \cdot X'(t), \quad \forall t \in I.$$

PROOF. Use  $X(t+h) - X(t) = X'(t)h + u(h)$  where  $\lim_{h \rightarrow 0} u(h)/h = \vec{0}$  and  $f(X+v) - f(X) = \nabla f(X) \cdot v + u_1(|v|)$  where  $u_1(t) = o(t)$ .  $\square$

정리 10.3.1의 증명. Let  $X(t) = P + tv$ . Note  $X(0) = P$  and  $X'(0) = v$ . Hence,

$$D_v f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + hv) - f(P)}{h} = \left. \frac{d}{dt} f \circ X(t) \right|_{t=0} = \nabla f(P) \cdot v$$

$\square$

미분가능성의 정의.

명제 10.5.2.  $n$  공간의 열린 집합  $U$ 에서 미분가능한 함수  $f$ 와 어떤  $P \in U, \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 만일

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(X + \vec{v}) - f(X) - \vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = 0$$

가 성립하면  $\vec{a} = \nabla f(P)$ 가 성립한다.

PROOF.

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + te_i) - f(P) - t\vec{a} \cdot e_i}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + te_i) - f(P)}{t} - a_i = \nabla f(P) \cdot e_i - a_i$$

implies  $\vec{a} = \nabla f(P)$ .  $\square$

## 6. 기울기 벡터와 등위면

주어진 함수  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 와 점  $P \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여  $\nabla f(P)$ 가 존재한다고 하자.

정리 10.6.1.  $\nabla f(P)$ 는 등위면  $f(x) = f(P)$ 의  $P$ 에서의 접평면과 수직하다.

곡면  $S$ 가 어떤 점  $P$ 에서 벡터  $v$ 와 수직하다 함은, 곡면에 포함되면서  $P$ 를 지나는 임의의 곡선의  $P$ 에서의 접벡터가  $v$ 와 수직하다는 뜻이다.

증명.  $f(X(t)) = k$  이면  $\nabla f(X(0)) \cdot X'(0) = 0$ 이다.

예제 10.6.2. 타원곡면  $x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 3$ 의 한 점  $(1, 2, 3)$ 에서의 접평면의 방정식을 구하라.

예제 10.6.3. 데카르트 곡선  $x^3 + y^3 = 3xy$ 의 접선 중  $x + y = 0$ 과 평행한 것을 찾으라.



## 7. 부록: 일급함수, 열린 집합, 닫힌 집합, 유계인 집합

정리 10.7.1.  $n$ -공간의 열린집합에서 정의된 일급함수는 미분가능하다.

PROOF. Let  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be of  $C^1$ . By the Mean Value Theorem 3.1.1,

$$f(x + \Delta x, y, z, \dots, w) - f(x, y, z, \dots, w) = \Delta x D_x f(x^*, y, z, \dots, w)$$

for some  $x^*$  between  $x$  and  $x + \Delta x$ , and similarly for  $y, z, \dots$  and  $w$ . So for  $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots, \Delta w)$ , we have

$$\begin{aligned} & f(X + \Delta X) - f(X) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - f(x, y, z, \dots, w) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) \\ &+ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - f(x, y, z, \dots, w) \\ &= \Delta x D_x f(x^*, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) + f(x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) \\ &- f(x, y, z, \dots, w) \\ &= \Delta x D_x f(x^*, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) \\ &+ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - f(x, y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) \\ &+ f(x, y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - f(x, y, z, \dots, w) \\ &= \Delta x D_x f(x^*, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) + \Delta y D_y f(x, y^*, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) \\ &+ f(x, y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - f(x, y, z, \dots, w) \\ &= \cdots = \Delta x D_x f(x^*, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) + \Delta y D_y f(x, y^*, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) \\ &+ \Delta z D_z f(x, y, z^*, \dots, w + \Delta w) + \cdots + \Delta w D_w f(x, y, z, \dots, w^*) \end{aligned}$$

Since  $f$  is  $C^1$ ,  $\nabla f$  is continuous.

$$\begin{aligned}
& |f(X + \Delta X) - f(X) - \Delta X \cdot \nabla f(X)| \\
&= \Delta X \cdot (D_x f(x^*, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - D_x f(x, y, z, \dots, w), \\
&D_y f(x, y^*, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w) - D_y f(x, y, z, \dots, w), \\
&D_z f(x, y, z^*, \dots, w + \Delta w) - D_z f(x, y, z, \dots, w), \\
&\dots, D_w f(x, y, z, \dots, w^*) - D_w f(x, y, z, \dots, w)) = \Delta X \cdot u
\end{aligned}$$

where  $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} u = 0$ . Hence

$$\frac{|f(X + \Delta X) - f(X) - \Delta X \cdot \nabla f(X)|}{|\Delta X|} = \frac{|\Delta X \cdot u|}{|\Delta X|} \leq |u| \rightarrow 0$$

as  $\Delta X \rightarrow 0$ . This proves that  $f$  is differentiable. □



## 최대최소값 문제와 고계미분

### 1. 적분기호 속의 미분법

정리 11.1.1 (라이프니츠 정리). 일급함수  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다:

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

예제 11.1.2.

$$\frac{d}{dx} \int_1^\pi \frac{\sin xy}{y} dy =$$

### 2. 이계미분

**Recall:**  $C^0, C^k$  함수.

정의 11.2.1.  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 이  $C^{k+1}$ 라 함은  $\nabla f$ 가 임의의  $P \in U$ 에서 존재하고 각 일계 편미분이  $C^k$ 라는 것을 의미한다.

정리 11.2.2 (Clairaut의 정리, 편미분 교환법칙).  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 가  $C^2$ 이면 임의의  $i, j$ 에 대하여  $D_i D_j f = D_j D_i f$ 이다.

PROOF. For  $x, y \in [a, b] \times [c, d]$ ,

$$\int_c^y D_1 D_2 f(x, t) dt = D_1 \int_c^y D_2 f(x, t) dt = D_1 (f(x, y) - f(x, c)).$$

Also,

$$\int_c^y D_2 D_1 f(x, t) dt = D_2 f(x, y) - D_2 f(x, c).$$

Hence we have

$$\int_c^y D_1 D_2 f(x, t) dt = \int_c^y D_2 D_1 f(x, t) dt$$

and complete a proof by differentiating the both sides. □

예제 11.2.3.

$$\frac{\partial^5}{\partial z^2 \partial x^2 \partial y} z e^{x^3 y \cos(xy)}$$

### 2.1. 방향미분작용소.

복습.  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 가  $C^1$ 이면  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$D_{\vec{v}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{v} = \sum_i v_i D_i f(P).$$

이제  $D_{\vec{v}}$ 는  $C^1$  함수들의 집합에서 연속함수들의 집합으로 가는 규칙(작용소, 혹은 함수)로 볼 수 있다. 이 때 이러한 작용소들 사이의 관계는  $D_{\vec{v}} = \sum_i v_i D_i$ 로 쓸 수 있다. 이 때

$$\begin{aligned} D_v^2 f(P) &= D_v(D_v f(P)) = \nabla(D_v f)(P) \cdot v = \nabla(\nabla f \cdot v)(P) \cdot v \\ &= \nabla\left(\sum_i v_i D_i f\right)(P) \cdot v = \left(\sum_{i,j} v_i D_i D_j f(P)\right) \cdot v = \sum_{i,j} v_i v_j D_i D_j f(P) \end{aligned}$$

이므로  $D_v^2 = \sum_{i,j} v_i v_j D_i D_j$ 로 쓸 수 있다.

예제 11.2.4.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 일 때,  $D_{(a,b)}f(P)$ 는  $(a,b)$  방향 단면의 일계미분을 의미하고  $D_{(a,b)}^2 f(P)$ 는  $(a,b)$  방향 단면의 이계미분을 의미한다.

연습문제 2.1. p.478 기본연습문제 2.1.3

$$D_{(a,b)}^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i} D_1^i D_2^{k-i}.$$

### 3. 테일러 전개와 근사값이론

일차근사값.  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 가 미분가능이라면 (혹은 조금 더 강하게,  $C^1$ 이면) 임의의  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여:

$$f(P + \vec{v}) = f(P) + \nabla f(P) \cdot \vec{v} + o(\vec{v}).$$

여기서  $f(P) + \nabla f(P) \cdot \vec{v}$ 를  $P$ 에서  $f(P + \vec{v})$ 의 일차근사값이라 부른다.

예제 11.3.1.  $(0.99e^{0.02})^8$ 의 일차근사값.

테일러 전개.  $f$ 가  $a \in \mathbb{R}$  근방에서 정의된  $C^n$  함수이면 충분히 작은 임의의  $h$ 에 대하여 적당한  $a^* \in (a, a+h) \cup (a+h, a)$ 가 존재하여 다음이 성립한다:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(a^*)}{(k)!}h^k.$$

여기서  $h$ 가 충분히 작다 함은  $f$ 가  $a+h$ 의 근방에서 잘 정의되어 있다는 의미이다. 위 조건을 다시 쓰면, 충분히 작은 임의의  $h$ 에 대하여 적당한  $0 < t^* < 1$

이 존재하여

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(a+t^*h)}{(k)!}h^k.$$

### 정리 3.2 다변수 테일러 전개, 3.0.3

$f: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ 가  $C^k$ 이고 어떤  $P \in U, v \in \mathbb{R}^k$ 에 대하여  $\{P+tv: t \in [0, 1]\} \subseteq U$ 가 성립한다고 가정하자. 그러면 적당한  $0 < t^* < 1$ 이 존재하여

$$\begin{aligned} f(P+v) &= f(P) + D_v f(P) + \frac{D_v^2 f(P)}{2} + \cdots \\ &\quad + \frac{D_v^{k-1} f(P)}{(k-1)!} + \frac{D_v^k f(P+t^*v)}{k!} \end{aligned}$$

가 성립한다.

PROOF.  $g(t) = f(P+tv)$ 일 때  $g^{(i)}(t) = D_v^i f(P+tv)$ 임을 이용하여

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2} + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{g^{(k)}(a+t^*)}{(k)!}.$$

□

09/16 테일러 전개 복습, 근사다항식, 방향미분작용소, 잉여항

### 3.1. 근사다항식과 잉여항.

근사다항식. 테일러 전개에서

$$T_k f(P, v) = f(P) + D_v f(P) + \frac{D_v^2 f(P)}{2} + \cdots + \frac{D_v^k f(P)}{k!}$$

를  $f$ 의  $v$ -방향 근사값이라 부른다. 또한,  $T_k f(P, X-P)$ 는  $f(X)$ 의 점  $P$ 에서의  $k$ -차 근사식이라 부른다.

예제 11.3.3.  $f(x, y) = e^x \cos y + xy$ 의  $(0, 0)$ 에서의 2차 근사식을 구하여라.

$$T_2 f(P, (a, b)) = f(P) + D_{(a,b)} f(P) + \frac{D_{(a,b)}^2 f(P)}{2}$$

을 이용한다.

**복습.** 일변수 함수  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  의  $k$  차 잉여항은  $f(x) - T_k^a f(x) = R_k^a f(x)$  로 주어진다. 또한

$$R_k^a f(a+h) = \frac{f^{(k+1)}(a+t^*h)}{(k+1)!} h^{k+1}$$

를 만족하는  $t^* \in (0, 1)$  이 존재하므로 만일  $M_{k+1} = \max_{x \in I} |f^{(k+1)}(x)|$  이 유한하다면  $|R_k^a f(a+h)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1}$  이 성립한다.

**잉여항.** 일반적으로  $R_k f(P, v) = f(P+v) - T_k f(P, v)$  를  $f$  의  $k$  차 잉여항이라 한다.

**정리 11.3.4. 만일**

$$M_{k+1} = \max |D_{i_0} D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(P+tv)| : i_0, i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}, t \in [0, 1]$$

이 유한하다면

$$|R_k f(P, v)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} (|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|)^{k+1}$$

이 성립한다.

PROOF. 적절한  $t^* \in (0, 1)$  이 존재하여

$$R_k f(P, v) = \frac{D_v^{k+1} f(P+t^*v)}{(k+1)!}$$

가 성립한다. 이제

$$D_v^{k+1} f(X) = \left( \sum_i v_i D_i \right)^{k+1} f(X) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}} v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k} D_{i_0} D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(X)$$

에서

$$\begin{aligned} |D_v^{k+1} f(P+t^*v)| &\leq \sum_{i_0, i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}} |v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}| M_{k+1} \\ &= M_{k+1} (|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|)^{k+1} \end{aligned}$$

이어서 증명이 끝난다.  $\square$

**따름정리 11.3.5 (따름정리 3.1.6).**  $C^{k+1}$  인 함수  $f$  의  $k$  차 잉여함수  $R_k f$  는

$$R_k f(P, v) = o(|v|^k)$$

를 만족한다.

예제 11.3.6.  $f(x, y) = e^x \sin y$ 이면  $M_k(x) \leq e^x$ 이다.

**3.2. 테일러 전개와 유일성.** 다변수 다항식  $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 각 항은  $\prod_{j=1}^k x_{i_j}$  꼴로 쓸 수 있고 이 때 이 항의 차수는  $k$ 로 정의한다. 다항식  $q$ 의 차수는 차수가 가장 높은 항의 차수로 정의한다. 만일  $g$ 가  $k$ 차 이하의 다항식이면  $T_k g = g$ 가 성립한다.

정리 11.3.7 (정리 3.2.2).  $C^{k+1}$ 인 함수  $f$ 와  $g$ 가 어떤 점  $P$  근방에서

$$f(P+v) = g(P+v) + o(|v|^k)$$

를 만족하면

$$T_k f(P, v) = T_k g(P, v)$$

를 만족한다.

위의 정리에서  $g$ 의 차수가  $k$  이하인 다항식이었다면  $T_k f = g$ 가 되어서 결국  $f - g = o(|v|^k)$ 가 되게 하는 다항식  $g$ 는  $T_k f$  밖에 없음을 알 수 있다.

연습문제 3.1. 차수가  $k$ 차 이하인 다변수 다항식 중에서  $o(|x|^k)$ 인 것은 0 밖에 없다. 이를 증명하라. (힌트. 산술-기하)

#### 4. 임계점 정리

09/21

**페르마의 임계점 정리.** 주어진  $a \in \mathbb{R}^n$  과  $r > 0$ 에 대하여  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ 로 정의하자. 어떤 집합  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 이 열려있다는 것은 임의의  $a \in U$ 에 대하여 적절한  $r > 0$ 가 존재하여  $B(a, r) \subseteq U$ 라는 것이다. 어떤 집합  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 가 닫혀있다는 것은  $\mathbb{R}^n \setminus C$ 가 열려있다는 것이다. 직관적으로 이는  $C$ 의 “경계”(우리에게는 아직 엄밀하게 정의한 적이 없는 용어이다)를  $C$ 가 포함한다는 것이다.

우리는 항상  $U$ 를 (다른 조건이 없다면) 주어진 열린 집합이라 가정한다. 다음은 일변수 함수의 직접적인 확장이다.

정의 11.4.1. (1)  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여  $a \in U$ 가  $f$ 의 극대점 (local maximum point)이라 함은  $a$ 를 포함하는 어떤 근방  $J = B(a, r)$



가 존재하여 임의의  $x \in J$ 에 대해

$$f(a) \geq f(x)$$

이라는 것이다. 극소값도 비슷하게 정의한다.

(2) 극대점과 극소점은 극점 (extremum point)이라 불린다. 또한 극대점, 극소점에서  $f$ 의 값을 극대값, 극소값 (통칭하여 극값)이라 부른다.

(3)  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여  $M \in \mathbb{R}$ 이  $f$ 의 최대값이라 함은  $M = f(a)$ 인  $a \in U$ 가 존재하고, 임의의  $x \in U$ 에 대해

$$f(x) \leq M$$

이라는 것이다. 최소값도 비슷하게 정의한다.

정의 11.4.2. (1) 미분가능한 함수  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여  $a \in U$ 가  $f$ 의 임계점이라 함은

$$\nabla f(a) = \vec{0}$$

이라는 것이다.

정리 11.4.3 (페르마 정리). 미분가능한 함수  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 의 극점은 항상 임계점이다.

PROOF.  $P \in U$ 가 극점이라 가정하고  $i = 1, 2, \dots, n$ 을 하나 고정한 후에  $g(t) = f(P + te_i)$ 라 정의하면

$$g'(0) = D_i f(P)$$

가 성립한다. 이 때

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

임에 주목하여 보자. 편의상 주어진 극점이 극대점이었다면 좌변은 0 이하여야 하고 우변은 0 이상이어야 한다. 따라서  $g'(0) = 0 = D_i f(P)$ 이다.  $\square$

위의 증명에서 극점의 성질에 의하여  $g$ 는  $t = 0$ 에서 극점을 가진다. 따라서 일변수 함수의 페르마 정리를 이용하여  $g'(0) = 0$ 라는 결론을 내리고 증명을 마칠 수도 있다. 위의 증명은 일변수 함수의 페르마 정리까지 한꺼번에 보이는 것이다.

최대최소. 어떤 집합  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  이 유계라 함은 적절한  $R > 0$  에 대하여  $A \subseteq B(O, R)$  이 성립한다는 것이다.

정리 11.4.4 (최대최소값 정리, 정리 2.1.2).  $\mathbb{R}^n$  의 유계인 닫힌 집합에서 정의된 연속함수는 최대값, 최소값을 가진다.

예제 11.4.5.  $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  이 주어져 있을 때

$$f(X) = \sum_i |X - P_i|^2$$

의 최소점을 (엄밀하게!) 구하여라.

## 5. 헤세판정법

최대최소점, 극점, 임계점의 관계.

정의 11.5.1. 극점이 아닌 임계점을 안장점이라 부른다.

일변수 함수의 극대극소 판정법.

정의 11.5.2 (헤시안). 미분가능한 함수  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  에 대하여

$$f''(P) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) \right)$$

로 정의한다.

예제 11.5.3.  $xy, xyz, \dots$

정의 11.5.4.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

에 대하여

$$(1) A > 0 \Leftrightarrow a > 0, \det A > 0.$$

$$(2) A < 0 \Leftrightarrow a < 0, \det A > 0.$$

$\det A = 0$  이거나  $a = 0$  인 경우에는 정의하지 않는다.

보조정리 11.5.5 (이차형식의 최대최소). 이차형식

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

에 대응되는 행렬  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 에 대하여

- (1)  $A > 0$ 이면  $O$ 는  $q$ 의 최소점이다.
- (2)  $A < 0$ 이면  $O$ 는  $q$ 의 최대점이다.
- (3)  $\det A < 0$ 이면  $O$ 는  $q$ 의 안장점이다.

증명: 식의 정리.

정리 11.5.6 (헤세 판정법).  $f'' > 0, f'' < 0, \det f'' < 0$ 의 경우.

증명: 테일러 전개 (생략).

예제 11.5.7. 다음 함수의 극값을 찾고 분류하라:

$$f = x^3 - 12xy + 8y^3.$$

## 6. 라그랑지 승수법

질문 11.6.1. 크기  $x \times y$ 의 스크린 제작비용이  $f(x, y) = 2x + 3y + x^2y$ 라 할 때 주어진 비용으로 만들 수 있는 스크린의 최대 면적은?

Karush–Kuhn–Tucker condition.

경제학에서 Cobb–Douglas production formula는 주어진 raw material  $x, y$ 에 대하여

$$p(x, y) = AL^\alpha K^\beta$$

로 주어진다. 여기서  $A$ 는 상수,  $L$ 는 labor,  $K$ 는 capital의 양이며  $\alpha + \beta = 1$ 인 경우를 *constant returns to scale* 경우라 한다.  $\alpha, \beta$ 는 *output elasticity*라 부른다.

정리 11.6.2 (라그랑즈 승수법).  $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 이  $C^1$  함수들이고  $S, g$ 의 한 등위면이라 하자. 만일  $P \in S$ 가  $S$ 위에서의  $f$ 의 극점이라면  $\nabla f(P)$ 와  $\nabla g(P)$ 는 일차종속이다.

증명. 3변수 함수에 한정.  $P$ 를 지나고  $S$  위에 있는 임의의 곡선  $X(t)$ 에 대하여  $\nabla f(P) \cdot X'(0) = f(X(t))'|_{t=0} = 0$ 임을 보면 된다.

예제 11.6.3. 철 10, 구리 20, 석유 30, 생산가  $f = x^2yz$ . 답이 복잡해 질 수 있음에 주의.

예제 11.6.4. 곡면  $S: z = 6xy + 7$ 과 원점의 거리를 구하여라.

최대최소정리.  $P \in \mathbb{R}^n$  과  $r > 0$ 에 대하여

$$B(P, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - P| < r\}$$

로 정의하자. 어떤  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  이 유계라 함은  $A \subseteq B(O, R)$  인  $R > 0$ 이 존재한다는 것이다.

이제  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 가 열려 있다는 것은 임의의  $P \in U$ 에 대하여  $B(P, r) \subseteq U$ 인  $r > 0$ 가 존재한다는 것이다. 또한 닫힌 집합은 열린 집합의 여집합을 의미한다.

**보조정리 11.6.5.** (1) 연속함수  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 의 등위면  $f = k$ 는 닫힌 집합이다.

(2) 연속함수  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 영역  $f \leq k$ 는 닫힌집합이다.

(3) 닫힌 집합 두 개의 교집합은 닫혀있다.

**예제 11.6.6.** 원점에서  $z = x^2 + 2y^2$ 까지의 최단 거리는?

일반적으로 원점에서 등위면  $g = k$ 까지의 최단거리는?

**부록: 라이프니츠 정리의 증명, 변분법**

**6.1. 라이프니츠 정리의 증명.** 각자 읽어 볼 것.

**6.2. 변분법.**

**질문 11.6.7 (Brachistochrone problem).** 수직인 평면 위의 두 점  $O$ 에서  $A$ 까지 중력에 의해 움직이는 최단시간 경로는?

$$y = f(x), f(0) = 0, f(a) = b, f'(x) \geq 0$$

을 가정하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - mgy &= 0 \\ v &= \sqrt{2gy} = \sqrt{2gf(x)} \end{aligned}$$

가 성립한다. 또한

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{dt}$$

이므로

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2gf(x)}} dx$$

이다. 이제

$$\mathcal{F} = \{f \in C^1[0, a]: f(0) = 0, f(a) = b\}$$

로 두고  $L: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  을

$$L(u, v) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + v(x)^2}{2gu(x)}} dx$$

로 정의하면 우리는  $L(f, f')$  를 최소로 하는  $f \in \mathcal{F}$  를 찾고자 하는 것이다.

보다 일반적으로  $C^2$  범함수  $L: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  이 있다고 하면 임의의  $C^1$  함수  $h: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, h(0) = 0, h(a) = 0$  에 대하여

$$g(t) = \int_0^a L(f + th, f' + th') dx$$

는  $g'(0) = 0$  이다. 이를 이용하면

$$0 = \int_0^a \left( D_1 L(f, f') - \frac{d}{dx} D_2 L(f, f') \right) h(x) dx.$$

이어서 결국  $D_1 L(f, f') - \frac{d}{dx} D_2 L(f, f') = 0$  이라는 오일러-라그랑즈 방정식을 얻는다. 이를 정리하여 적분하면

$$L(f, f') = f' D_2 L(f, f') + C$$

를 얻고 따라서

$$\sqrt{\frac{1 + f'^2}{2gf}} = f' \frac{f'}{\sqrt{2gf} \sqrt{1 + f'^2}} + C$$

가 되어서 결국 미분방정식

$$f(1 + f'^2) = \frac{1}{2gC^2} = 2r$$

이 되고 이는

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1}$$

이 되어서 치환  $y(u) = r(1 - \cos u)$  에 대하여  $x(u) = r(u - \sin u)$  를 얻고, 구하는 brachistochrone은 cycloid임을 얻는다.

CHAPTER 12

다변수 벡터함수

1. 야코비 행렬

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $k$ -급 함수, 미분가능성 정리, 야코비 행렬식, 부피팽창률,  
연쇄법칙

역함수, 음함수 정리



## CHAPTER 13

### 벡터장과 선적분

#### 1. 벡터장

정의, 기하학적 의미 (물의 흐름),

#### 2. 선적분

일, 함수의 선적분 복습, 벡터장의 선적분, 단위접벡터장, 재매개화

#### 3. 기울기 벡터장

잠재함수, 선적분의 기본정리, 입체각 벡터장

#### 4. 잠재함수의 존재성

보존장, 닫힌벡터장, 각원소벡터장



13.2 선적분

곡선  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

X를 따르는 벡터장  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$


$C = X$  위의 각 점에서 정의된 벡터장.

eg.   $X(t) = (t, t^2, t^3)$

속도  $X'$   
가 "  $X''$   
단위 접 벡터  $X'/|X'|$

동기  $F$  : 힘  $C: \vec{r}(t)$   $a \leq t \leq b$   
일 = ?



  $W = |\vec{F}| \cos \theta |\Delta \vec{s}| = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned} |r'| dt = ds & \rightsquigarrow = \int_C \vec{F} \cdot \vec{e} ds \\ r'/|r'| = t & \end{aligned}$$

정리 2.3.1  $\gamma$  : 곡선  $X$  의 양방향

$$\Rightarrow \int_X f ds = \int_{\gamma} f ds \quad \int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{-X} f ds = \int_X f ds \quad \int_{-X} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_X \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

eg.  $F(X(t)) = t X'(t)$   $a \leq t \leq b$   
 $\int_a^b F \cdot ds = \int_a^b t X'' \cdot X' dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (X' \cdot X') dt = \frac{1}{2} v_b^2 - \frac{1}{2} v_a^2$

p558, 2.2.2.  $\vec{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$   $X(t) = 2(\cos t, \sin t)$   $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_C \vec{F} \cdot ds = \int_0^{2\pi} (-2\sin t, 2\cos t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t) dt$$

$$X'(t) dt$$

$$= 4 \cdot 2\pi = 8\pi$$

ex.  $S: x^3 + y^3 + z^3 = 3$   $T: x + 2y + 3z = 3$

$$F = (x^2)\mathbf{i} + (y^2 - 2)\mathbf{j} + (z^2 - 3)\mathbf{k}$$

$$X: S \cap T$$

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \leq t \leq b$$

$$\int_C \vec{F} \cdot ds = \int_a^b (x^2, y^2 - 2, z^2 - 3) \cdot (x', y', z') dt$$

$$= \int_a^b (x^2 x' + y^2 y' + z^2 z' - 2y' - 3z') dt = 0.$$

$$S: x^2 x' + y^2 y' + z^2 z' = 0 \quad \uparrow \quad T: x' + 2y' + 3z' = 0$$

ex.  $F = \frac{-y\mathbf{i}}{x^2 + y^2} + \frac{x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$

$$X: (2\cos t, 3\sin t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_C \vec{F} \cdot ds = ?$$

Sol)  $I = \int_0^{2\pi} \vec{F}(X(t)) \cdot X'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-3\sin t, 3\cos t) dt$

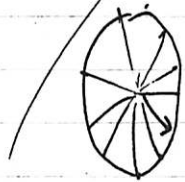
$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-3\sin t, 2\cos t) \cdot (-2\sin t, 3\cos t)}{4\cos^2 + 9\sin^2} dt = 6 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2 + 9\sin^2}$$

eg.  $F(x,y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$X(t) = (2\cos t, 3\sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$\int_X F \cdot d\vec{s} = ?$

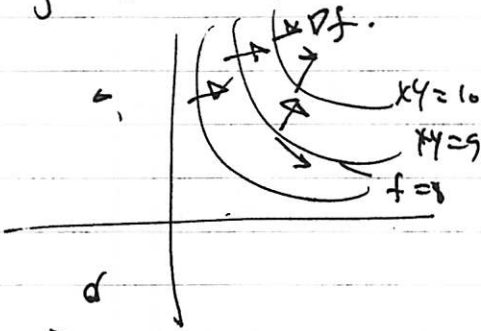
sol) Write  $X(t) = |X(t)| (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$



$\theta'(t) = \left( \frac{X(t)}{|X(t)|} \right)'$

§3. 가환기 벡터장, 장의 함수.

$f(x,y) = xy \rightsquigarrow \nabla f(x,y) = (y, x) \quad \nabla f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
가환기 벡터장



$\vec{F} = \nabla f \iff F$  is  $f$ 's 가환기 벡터장  $\iff f$  is  $F$ 's 장의 함수. <sup>pot-fn.</sup>

§3.1.1 선적분기 불변성.  $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad X: [a,b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$

$\int_X \text{grad } f \cdot d\vec{s} = f(X(b)) - f(X(a))$

pf)  $\int_X \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(X(t)) \cdot X'(t) dt$

$= \int_a^b \frac{d(f \circ X(t))}{dt} dt = f(X(b)) - f(X(a)) \quad \square$

eg. 입자장 벡터장  $\vec{A}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$


Since  $\nabla \varphi = \vec{A} \quad \varphi_x = \frac{x}{r^3} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \rightsquigarrow \varphi = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{r}$

$C: (t, t^2, t^3) \quad 1 \leq t \leq 1$

$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 = \varphi_1 - \varphi_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$



Cor 3.31  $X \& Y \Rightarrow \int_X F = \int_Y F$

(1)   $F$  존재함 (4조건)

(2)  $X$ : 닫힌 구간  $\Rightarrow \int_X F = 0$ . ( $\oint_X F = 0$ )

§3.4 점대함수의 존재성.

eg  $\vec{F} = (y \cos xy, x \cos xy)$

$P_x = y \cos xy$

$P_y = \sin(xy) + f(y)$

$P_y = x \cos(xy) + f'(y)$   
 $f'(y) = y + C$

Check

$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \vec{F}$

eg.  $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$

Spse  $P_x = -y \Rightarrow P_{xy} = -1$   
 $P_y = x \Rightarrow P_{yx} = 1$

$(\Rightarrow \Leftarrow)$

~~§3.4 Cor 3.31~~

정리 3.52

$\vec{F}$ 는 보존량  $\Rightarrow$   
 $f'_i = f''_i$

$D_i f_j = D_j f_i$

4.1.5

정의  $F$ : 닫힌 벡터장  $\Leftrightarrow D_i f_j = D_j f_i$  4.1.5

각원소 벡터장  $\vec{a}(x,y) = \frac{(-y, x)}{x^2+y^2}$  check 쓸 것.

$\int_{S^1} \vec{a} \cdot d\vec{s} = 2\pi \Rightarrow$  Cor 3.31 보존량 아님..

정리  $\varphi$ 가  $F$ 의 점대함수  $\Leftrightarrow \{ \vec{a} \cdot \vec{v} \} = \{ \varphi + C \}$   
 $W$ 의 두 점  $a, b$  연결

§4 전미분/미분형식.

$f(x,y) \rightarrow g(x,y)$

**5. 전미분, 미분형식**

미분형식, 전미분, 벡터장과의 관계

포앙카레 도움정리, 적분곡선

Poincaré's Lemma, 적분곡선

## Poincaré Lemma

$$\mathbb{F}: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \mathcal{U}: \text{볼록}$$

$$D_i(\mathbb{F} \cdot e_j) = D_j(\mathbb{F} \cdot e_i) \quad \forall i, j$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{F} = \nabla \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

e.g.  $\mathbb{F} = (2xy, x^2+1)$   $D_y(2xy) = D_x(x^2+1) \therefore \mathbb{F} = \nabla \varphi$   
 $\forall \text{볼록}$

Proof  $x, p \in \mathcal{U}$   $C(t) = p + t(x-p)$

Define  $\varphi(x) := \int_C \mathbb{F} \cdot ds$

$$= \int_0^1 \mathbb{F}(p + t(x-p)) \cdot (x-p) dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^m f_j(p + t(x-p)) (x_j - p_j) dt$$

$$D_i \varphi = \int_0^1 f_i(p + t(x-p)) \cdot 1 dt$$

$$+ \int_0^1 \sum_{j=1}^m (D_i f_j)(p + t(x-p)) \cdot t \cdot (x_j - p_j) dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^m \underbrace{D_j f_i(p + t(x-p)) t (x_j - p_j) + f_i(p + t(x-p))}_{\text{chain rule}} dt$$

$$= \int_0^1 \left( t \nabla f_i(C(t)) \cdot C'(t) + f_i(C(t)) \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t f_i(C(t))) dt = f_i(x) = \mathbb{F} \cdot e_i \therefore \mathbb{F} = \nabla \varphi$$



## Part V

### 다중적분과 그린 정리





CHAPTER 14

다중적분

1. 넓이와 부피

복습. 만일 우변이 존재한다면,

$$\int_a^b f := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i).$$

보다 정확하게는,  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  에 대하여  $f: [a, b] \times [c, d] \times \dots \rightarrow \mathbb{R}$  로 자명한 확장을 시행한 후에,  $\lim_{|P| \rightarrow 0} L(P, f) = \lim_{|P| \rightarrow 0} U(P, f)$  이면 그 값을  $\int f$  로 정의.

넓이, 부피 등은  $V_n(A) = \int_A f dV_n = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dV_n$  으로 정의.

적분가능한 함수.

정리 2.5.1, 2.5.2.

평균.

2. 푸비니 정리

2차원:  $f$  와  $f_x$  가 모두 적분가능하면  $F$  도 적분 가능하다.

반원판.

포물선  $y = 1 - x^2$  밑도  $y^2$  의 질량, 기하학적 중심?

보기 3.0.7.

일반적인 영역.

$$\int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\int_a^b \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx dy$$

고차원 푸비니 정리.

보기

3.0.10.

## 3.0.11

## 3. 2차원 푸비니 정리의 증명

$x \in [a, b]$ ,

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

우리가 증명할 식은

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b F dx.$$

조건에 의하여  $F$ 는 잘 정의되어 있고,  $L(P, f)$ 와  $U(P, f)$ 는  $|P| \rightarrow 0$ 일 때 같은 값으로 수렴.

그래프 아래의 부피

**5.2.1 입체각 벡터장.**  $P \in \mathbb{R}^3$ 에 대한 입체각 벡터장은 각  $X \in \mathbb{R}^3$ 에서

$$A_P(X) = \frac{X - P}{|X - P|^3}$$

로 정의된다. 이제

$$F(X) = \iiint_{|P| \leq a} A_P(X) dV(P)$$

로 두면

$$F(X) = \begin{cases} \frac{4\pi a^3}{3|X|^3} X & \text{if } |X| \geq a, \\ \frac{4\pi}{3} X & \text{if } |X| \leq a \end{cases}$$

임을 증명하라.

**예제 14.3.1.** 반지름이  $r$ 이고 밀도가 1인 균일한 원판의 중심과 수직인 직선  $L$ 을 생각하자. 이 직선  $L$  위에서 원판의 중심과 거리가  $d$ 인 점에서 원판에 대한 위치에너지는?

**3.1. 관성모멘트.** 질점, 고체, 평면 영역, 나선, 곡면

밀도함수가  $\mu$ 인 고체를 직선  $\ell$  주위로 회전시킬 때 운동에너지는

$$\iiint \frac{1}{2} \mu r \omega dt dx dy dz = \frac{1}{2} I \omega^2$$

으로 주어지는 데 여기서

$$I = \iiint \mu r^2 dx dy dz$$

이다.

예: 상자,



## 벡터장의 발산과 그린 정리

### 1. 발산함수

물리적인 의미

### 2. 평면의 발산정리

법선벡터, 외향법선벡터, 평면의 발산정리, 2차원 입체각 벡터장, 각원소 벡터장 별모양의 곡선에 대한 2차원 입체각 벡터장의 적분

보기 2.1.3 각자 읽어볼 것

미적분학의 기본정리  $\Rightarrow$  2차원 발산정리

### 3. 회전도

정의, 예

비회전장과 보존장, 각원소 벡터장

회전도의 물리적 의미

$$\text{rot}(F) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot T ds.$$

### 4. 경계와 항

양의 방향

### 5. 그린정리

그린 정리

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

종이호랑이 예제

Cycloid의 넓이  $\int y dx$ .

미적분학의 기본정리  $\Rightarrow$  2차원 발산정리  $\Rightarrow$  2차원 그린정리

## 6. 부록: 발산함수와 부피변화

보조정리 15.6.1. 열린 구간  $J \subseteq \mathbb{R}$ 에서 주어진  $C^1$  함수

$$A: J \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

가  $A(0) = I_3$ 를 만족하면

$$(\det A(t))'|_{t=0} = \operatorname{tr} A'(0)$$

가 성립한다.

이제  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 주어진 벡터장이라 하고  $P \in U$ 를 고정하자.  $P$  주위의 작은 영역  $D \subseteq U$ 가 주어졌을 때,  $F$ 에 의해 정의된 흐름이  $\Phi_t$ 라면

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(X) = F(\Phi_t(X)), \Phi_0(X) = X$$

가 임의의  $X \in D$ 에 대해 성립한다. 한편  $\Phi_0$ 는 항등사상이므로  $\det D\Phi_t \neq 0$ 가 작은  $t$ 에 대해 성립한다. 따라서 치환적분이 적용가능하여

$$\operatorname{vol}(D_t) = \iiint_{D_t} dV_3 = \iiint_D \det D\Phi_t dV_3$$

가 성립한다. 여기서 부터  $t = 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\operatorname{vol}(D_t) &= \iiint_D \frac{d}{dt} \det D\Phi_t dV \\ &= \iiint_D \operatorname{tr} \frac{d}{dt} D\Phi_t dV \\ &= \iiint_D \operatorname{tr} D \frac{d}{dt} \Phi_t dV \\ &= \iiint_D \operatorname{tr} DF dV = \iiint_D \operatorname{div} F dV \end{aligned}$$

## Part VI

### 면적분과 발산 정리 및 스토크스 정리





## 곡면과 면적분

## 1. 곡면

매개곡면의 정의, 토러스, 그래프, 등위면, 회전면, 일반적인 회전면

**복습.** 곡선  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 정규곡선이라 함은  $X$ 가  $C^1$ 이고 모든  $t$ 에 대하여  $X'(t) \neq \vec{0}$ 임을 의미한다.

**정의 16.1.1.** 곡면  $X: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 정규곡면이라 함은  $X$ 가  $C^1$ 이고 모든  $(u, v) \in D$ 에 대하여  $X_u \times X_v \neq \vec{0}$ 임을 의미한다. 이 때  $X_u \times X_v$ 를 곡면에 정의된 법벡터장이라 부른다.

## 2. 곡면의 넓이

11/09: 정규곡선, 정규곡면,  
넓이의 정의, 면적소, 직관적인 의미  
그래프, 구면

## 3. 면적분

면적분의 정의.

동기-총질량.

**예제 16.3.1.** 원뿔  $r = z \leq 1$ 의 밀도가  $f = z$ 일 때 총질량과 평균 밀도를 구하여라.

평균값

**정리 16.3.2** (적분의 평균값 정리).  $X$ 가 구간, 곡선, 곡면 또는  $n$  차원 영역일 때 연속함수  $f$ 에 대하여 어떤  $\bar{x} \in X$ 가 존재하여

$$\frac{\int_X f}{\int_X 1} = f(\bar{x})$$

가 성립한다.

무게중심.

재매개화.

예제 16.3.3.  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$  의 밀도가  $f = z$  일 때 평균밀도와 무게중심을 구하여라.

재매개화 (곡선, 곡면).

정리 16.3.4 (정리 3.1.1). 매개곡면  $X: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  에서 정의된 함수  $f$  의 면적분값은 곡면을 재매개화하여도 변하지 않는다.

PROOF.  $G: \tilde{D} \rightarrow D$  를 잡고  $\tilde{X} = X \circ G$  일 때

$$\int_X f dS = \int_{\tilde{X}} f$$

를 보이면 충분하다. 이는

$$\int_X f dS = \int_D f \circ X(u, v) |X_u \times X_v| du dv = \int_{\tilde{D}} f \circ X \circ G |X_u \times X_v| \left| \frac{(u, v)}{(U, V)} \right| dU dV$$

$$\int_{\tilde{X}} f = \int_{\tilde{D}} f \circ X \circ G |\tilde{X}_U \times \tilde{X}_V| dU dV$$

한편

$$\begin{aligned} \tilde{X}_U &= \frac{\partial X}{\partial U} = X_u \frac{\partial u}{\partial U} + X_v \frac{\partial v}{\partial U} \\ \tilde{X}_V &= \frac{\partial X}{\partial V} = X_u \frac{\partial u}{\partial V} + X_v \frac{\partial v}{\partial V} \end{aligned}$$

에서 원하는 결론을 얻는다. □

그래프의 면적분, 곡면의 중심, 유향곡면

#### 4. 벡터장과 면적분

복습: 유향곡면.

벡터장의 면적분.

폐곡면과 플럭스.

예제 16.4.1.  $F = xi + yj$  이고  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  를  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  로 둘러싸인 영역이라 할 때,  $F$  의  $\partial D$  에 대한 플럭스를 구하여라.

그래프의 면적분 공식.

정리 16.4.2.  $\vec{F} = Pi + Qj + Rk$  일 때 그래프  $S: z = g(x, y), (x, y) \in D$ 에 대하여

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D (-Pg_x - Qg_y + R) dx dy.$$

PROOF.  $X(x, y) = (x, y, g(x, y))$ 에 대하여  $X_x \times X_y = (-g_x, -g_y, 1)$  이므로 자명.  $\square$

예제 16.4.3 (p.724 보기 4.3.1).



## CHAPTER 17

### 발산 정리

#### 1. 발산정리

발산정리.

예제 17.1.1 (p.729 보기 1.0.3).

입체각 벡터장에서의 발산정리.

예제 17.1.2. 입체각 벡터장  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$ 을 생각하자.

- (1) 원점을 중심으로 하는 반지름  $a$ 인 구면  $S_a$ 에 대하여  $\int_{S_a} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ 임을 증명하라.
- (2)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ 임을 증명하라.
- (3) 여덟 개의 점  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ 이 이루는 정팔면체의 내부를  $E$ 라 할 때,  $\int_{\partial E} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하여라.
- (4) 원점을 지나지 않는 임의의 곡면  $S$ 에 대하여  $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 의 의미를 설명하라.

#### 2. 가우스 정리

가우스정리. 입체각 벡터장

$$A_P(X) = \frac{X - P}{|X - P|}$$

을 생각하자.  $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여  $E_i(X) = \frac{q_i}{4\pi} A_{P_i}(X)$ 이 주어져 있다고 하고,  $E(X) = \sum_{i=1}^n E_i(X)$ 로 정의하자.  $S$ 는  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 과 만나지 않는  $\mathbb{R}^3$ 의 닫힌 곡면이라면

$$\sum_{i=1}^n q_i = \iint_S E \cdot d\mathbf{S}$$

가 성립한다.

#### 3. 발산정리의 증명

복습. 미적분학의 기본정리, 연쇄법칙  $\Rightarrow$  선적분의 기본정리

증명. 미적분학의 기본정리  $\Rightarrow$  2차원 발산정리  $\Rightarrow$  3차원 발산정리

CHAPTER 18

**회전장과 스톡스 정리**

**1. 회전장**

예제, 비회전장, 기울기 벡터장과의 관계

**2. 스톡스 정리**

예제, 폐곡면의 회전장 면적분

**3. 스톡스 정리의 증명, 미분형식**

미적분학의 기본정리  $\Rightarrow$  2차원 발산정리  $\Rightarrow$  2차원 그린정리  $\Rightarrow$  스톡스 정리





## Bibliography